

# Laboratorio Calcolo Numerico

## Esercizio 1

- Considerate le seguenti formule (le stesse che si trovano a pagg. 125-126 del libro) per risolvere un sistema triangolare superiore ed inferiore con i metodi delle *sostituzioni all'indietro* e *sostituzioni in avanti*, si scrivano due algoritmi che le implementino

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( b_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \right), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \\ x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left( b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k \right), \quad i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Si scrivano poi le corrispondenti funzioni Matlab che abbiano le seguenti intestazioni

```
function xv = trisup(U, b)
%TRISUP Determina la soluzione di un sistema triangolare
% superiore
%
% Uso:
%   xv = trisup(U, b)
%
% Dati di ingresso:
%   U:      matrice triangolare superiore quadrata
%   b:      vettore COLONNA termine noto
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore COLONNA contenente la soluzione
```

```
function xv = triinf(L, b)
%TRIINF Determina la soluzione di un sistema triangolare
% inferiore
%
% Uso:
%   xv = triinf(L, b)
%
% Dati di ingresso:
%   L:      matrice triangolare inferiore quadrata
%   b:      vettore COLONNA termine noto
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore COLONNA contenente la soluzione
```

Si noti che tra i parametri di ingresso manca il valore **n** che indica la dimensione del sistema. Tale valore deve essere determinato all'interno della funzione stessa.

All'interno delle due funzioni deve anche essere verificato se il sistema è singolare (determinante della matrice uguale a zero, ovvero, essendo un sistema a matrice triangolare, prodotto degli elementi diagonali uguale a zero). Se è singolare, si interrompa l'esecuzione (comando **error**) dando un'opportuno avviso all'utilizzatore.

Si verifichi anche che la lunghezza del vettore termine noto sia compatibile con la dimensione della matrice quadrata.

- Si costruiscano poi due script files **trisupscript.m** e **triinfscript.m**) che
  - leggano o assegnino la matrice aumentata ( $U|\mathbf{b}$ ) (rispettivamente ( $L|\mathbf{b}$ ));
  - definiscano, a partire dalla matrice aumentata, la matrice  $U$  (rispettivamente  $L$ ) ed il vettore termine noto  $\mathbf{b}$ ;
  - verifichino che la matrice sia quadrata;
  - verifichino che la matrice sia effettivamente triangolare superiore (rispettivamente inferiore), usando il comando **tril** (rispettivamente **triu**);
  - utilizzino la function **trisup** (rispettivamente **triinf**) per determinare la soluzione;
  - visualizzino la matrice  $U$  (rispettivamente  $L$ ), il vettore  $\mathbf{b}$ , la dimensione del sistema ed il vettore soluzione.
  - calcolino e visualizzino la soluzione anche con il comando Matlab  $U \backslash \mathbf{b}$  (rispettivamente  $L \backslash \mathbf{b}$ );
  - confrontino le soluzioni dei due metodi calcolando e visualizzando la norma della differenza tra i due vettori soluzione.
- Si provino gli script **trisupscript.m** e **triinfscript.m** rispettivamente con i seguenti sistemi a **matrice singolare** (rappresentati come matrici aumentate), per verificare che venga eseguito il comando **error**.

$$(U|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right)$$

$$(L|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Si provi lo script **trisupscript.m** e la function **trisup.m** con il seguente sistema determinato (soluzione numerica  $(6.870419044176498\text{e}-01, -2.055846737755264\text{e}-02, 1.236580516898608\text{e}+00)^T$ )

$$(U|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1.75 & 2.02 & 3.04 & 4.92 \\ 0 & 13.2 & 18.9 & 23.1 \\ 0 & 0 & 50.3 & 62.2 \end{array} \right)$$

e si verifichi il proprio risultato con la soluzione Matlab. I risultati coincidono? Perché?

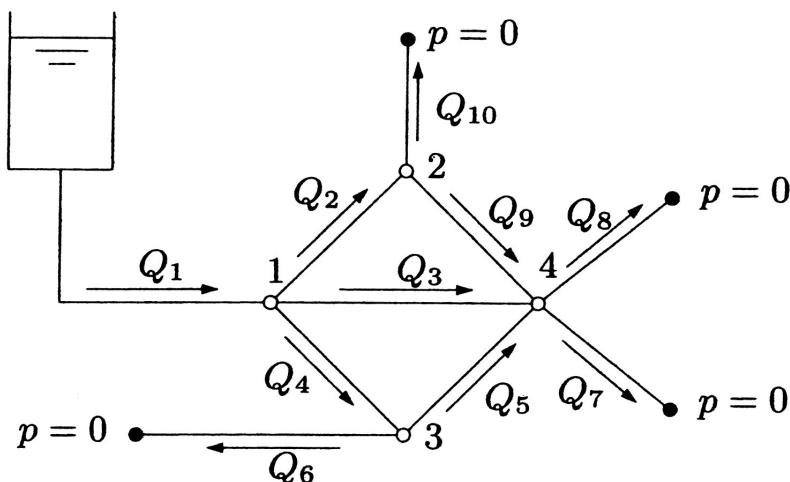
- Si provi lo script **triinfscript.m** e la function **triinf.m** con il seguente sistema determinato (soluzione numerica  $(7.028571428571428\text{e}-01, 3.299415584415585\text{e}-01, 1.426922232836746\text{e}-01)^T$ )

$$(L|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 3.5 & 0 & 0 & 2.46 \\ 4.04 & 26.4 & 0 & 11.55 \\ 6.08 & 37.8 & 100.6 & 31.1 \end{array} \right)$$

e si verifichi il proprio risultato con la soluzione Matlab. I risultati coincidono? Perché?

## Esercizio 2

Si consideri un sistema idraulico alimentato da un bacino d'acqua posto ad una pressione costante  $p_r = 10$  bar e formato da 10 condotte disposte come nella figura seguente:



In questo problema i valori delle pressioni corrispondono alla *differenza* fra la pressione effettiva e quella atmosferica.

Nella condotta  $j$ -esima vale la seguente relazione fra la portata  $Q_j$  (in  $\text{m}^3/\text{s}$ ) e la differenza di pressione  $\Delta p_j$  alle estremità della condotta

$$Q_j = kL\Delta p_j,$$

dove  $k$  è la resistenza idraulica (misurata in  $\text{m}^2/(\text{bar s})$ ) e  $L$  è la lunghezza in metri della condotta. Supponiamo che nelle condotte terminali (indicate in figura dal pallino nero) l'acqua esca alla pressione atmosferica  $p = 0$ .

Per determinare i valori di pressione nei nodi interni 1, 2, 3 e 4 del sistema, si sfrutta il fatto che la somma algebrica delle portate nel nodo  $j$ -esimo deve essere nulla (una portata positiva indica che l'acqua entra nel nodo, una portata negativa indica che l'acqua ne esce).

Denotando con  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$  il vettore delle pressioni nei nodi interni, si ottiene un sistema di 4 equazioni e 4 incognite della forma  $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ .

A partire dai seguenti dati

| condotta | $k$   | $L$ |
|----------|-------|-----|
| 1        | 0.010 | 20  |
| 2        | 0.005 | 10  |
| 3        | 0.005 | 14  |
| 4        | 0.005 | 10  |
| 5        | 0.005 | 10  |
| 6        | 0.002 | 8   |
| 7        | 0.002 | 8   |
| 8        | 0.002 | 8   |
| 9        | 0.005 | 10  |
| 10       | 0.002 | 8   |

si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} -0.370 & 0.050 & 0.050 & 0.070 \\ 0.050 & -0.116 & 0 & 0.050 \\ 0.050 & 0 & -0.116 & 0.050 \\ 0.070 & 0.050 & 0.050 & -0.202 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si costruisca uno script `idrascript.m` che

- legga da file esterno di nome `idra.dat` (dati strutturati in 4 righe e 5 colonne, e fornito dai docenti) la matrice aumentata  $(A|\mathbf{b})$  e memorizzi poi separatamente la matrice  $A$  ed il vettore termine noto  $\mathbf{b}$ ;
- verifichi che la matrice  $A$  sia quadrata;
- calcoli le matrici della fattorizzazione di Gauss **con pivoting** con il comando Matlab

`[L,U,P]=lu(A)`

- risolva il sistema  $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$  utilizzando tale fattorizzazione (si ricordi che  $P \times A = L \times U$ ) e le due function `triinf` e `trisup`, calcolando la soluzione  $\mathbf{p}$ ;
- calcoli la soluzione dello stesso sistema (assegnandola ad un **altro** vettore) con il comando Matlab

`A\b`

- visualizzi la matrice  $A$ , il vettore  $\mathbf{b}$ , la dimensione del sistema, il vettore soluzione ottenuto utilizzando la risoluzione dei sistemi triangolari, il vettore soluzione ottenuto utilizzando l'operatore Matlab `\`, e la norma della differenza tra i due vettori soluzione.