CALCOLO NUMERICO

Ing. chimica e dei materiali, Canale A - A.A. 2023-24

Laboratorio 9 - 8 maggio 2024

- ***ESERCIZIO 1.***

  Scrivere due algoritmi per l'implementazione delle seguenti formule per risolvere un sistema triangolare superiore ed inferiore rispettivamente:

$$\begin{cases} \text{SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO} \\ x_n = \dfrac{b_n}{u_{nn}} \\ x_i = \dfrac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}\, x_k \right), \quad i = n-1, \ldots, 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \text{SOSTITUZIONE IN AVANTI} \\ x_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ x_i = \dfrac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, x_k \right), \quad i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

  1. Scrivere le corrispondenti funzioni Matlab che abbiano le seguenti intestazioni:

```
function xv = trisup(U, b)
%TRISUP Determina la soluzione di un sistema triangolare
%   superiore
%
% Uso:
%   xv = trisup(U, b)
%
% Dati di ingresso:
%   U:      matrice triangolare superiore quadrata
%   b:      vettore COLONNA termine noto
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore COLONNA contenente la soluzione
```

```
function xv = triinf(L, b)
%TRIINF Determina la soluzione di un sistema triangolare
%   inferiore
%
% Uso:
%   xv = triinf(L, b)
%
% Dati di ingresso:
%   L:      matrice triangolare inferiore quadrata
%   b:      vettore COLONNA termine noto
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore COLONNA contenente la soluzione
```

Specifiche:

- Si noti che tra i parametri di ingresso manca il valore `n` che indica la dimensione del sistema. Tale valore deve essere determinato all'interno della funzione stessa.
  Si verifichi anche che la lunghezza del vettore termine noto sia compatibile con la dimensione della matrice quadrata.
- All'interno delle due funzioni deve anche essere verificato se il sistema è singolare (determinante della matrice uguale a zero, ovvero, essendo un sistema a matrice triangolare, prodotto degli elementi diagonali uguale a zero). Se è singolare, interrompere l'esecuzione (comando `error`) dando un'opportuno avviso all'utilizzatore.

2. Si costruiscano poi due script files `trisupscript.m` e `triinfscript.m` che:
   - leggano o assegnino la matrice aumentata $(U|\mathbf{b})$ (rispettivamente $(L|\mathbf{b})$);
   - definiscano, a partire dalla matrice aumentata, la matrice `U` (rispettivamente `L`) ed il vettore termine noto `b`;
   - verifichino che la matrice sia quadrata;
   - verifichino che la matrice sia effettivamente triangolare superiore (rispettivamente inferiore), usando il comando `tril` (rispettivamente `triu`);
     (aiutarsi con la documentazione Matlab per l'utilizzo del comando - es. help tril)
   - utilizzino la function `trisup` (rispettivamente `triinf`) per determinare la soluzione;
   - visualizzino la matrice `U` (rispettivamente `L`), il vettore `b`, la dimensione del sistema ed il vettore soluzione;
   - calcolino e visualizzino la soluzione anche con il comando Matlab `U\b` (rispettivamente `L\b`);
   - confrontino le soluzioni dei due metodi calcolando e visualizzando la norma della differenza tra i due vettori soluzione.
3. Si provino gli script `trisupscript.m` e `triinfscript.m` rispettivamente con i seguenti sistemi a **matrice singolare** (rappresentati come matrici aumentate), per verificare che venga eseguito il comando `error`.

$$(U|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \qquad (L|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

4. Si provi lo script `trisupscript.m` e la function `trisup.m` con il seguente sistema determinato (soluzione numerica $[6.870419044176498\mathtt{e}{-}01, -2.055846737755264\mathtt{e}{-}02, 1.236580516898608\mathtt{e}{+}00]^T$)

$$(U|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1.75 & 2.02 & 3.04 & 4.92 \\ 0 & 13.2 & 18.9 & 23.1 \\ 0 & 0 & 50.3 & 62.2 \end{array}\right)$$

   e si verifichi il proprio risultato con la soluzione Matlab. I risultati coincidono? Perchè?

5. Si provi lo script `triinfscript.m` e la function `triinf.m` con il seguente sistema determinato (soluzione numerica $[7.028571428571428\mathtt{e}{-}01, 3.299415584415585\mathtt{e}{-}01, 1.426922232836746\mathtt{e}{-}01]^T$)

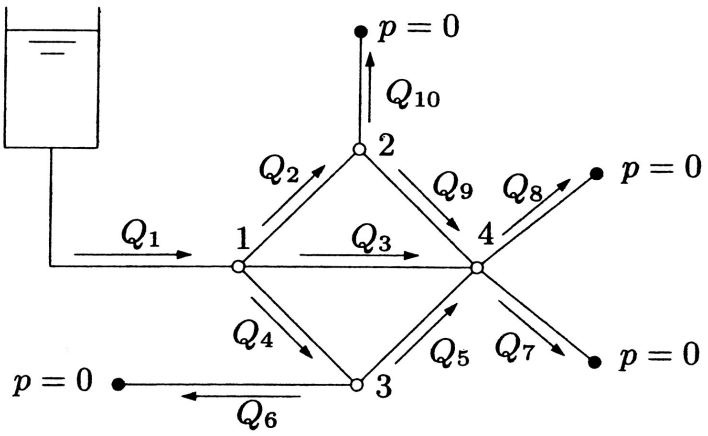
$$(L|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3.5 & 0 & 0 & 2.46 \\ 4.04 & 26.4 & 0 & 11.55 \\ 6.08 & 37.8 & 100.6 & 31.1 \end{array}\right)$$

   e si verifichi il proprio risultato con la soluzione Matlab. I risultati coincidono? Perchè?

6. **CONSEGNA:** Si crei un file .zip con i codici creati. Si rinomini lo zip (**cognome_nome_lab9.zip**) e si carichi su moodle.

- ***ESERCIZIO 2.***

Si consideri un sistema idraulico alimentato da un bacino d'acqua posto ad una pressione costante $p_r = 10\,\text{bar}$ e formato da 10 condotte disposte come nella figura seguente:



In questo problema i valori delle pressioni corrispondono alla *differenza* fra la pressione effettiva e quella atmosferica.

Nella condotta j-esima vale la seguente relazione fra la portata Q_j (in m^3/s) e la differenza di pressione Δp_j alle estremità della condotta:

$$Q_j = kL\Delta p_j,$$

dove k è la resistenza idraulica (misurata in $\text{m}^2/(\text{bar s})$) e L è la lunghezza in metri della condotta. Supponiamo che nelle condotte terminali (indicate in figura dal pallino nero) l'acqua esca alla pressione atmosferica $p = 0$.

Per determinare i valori di pressione nei nodi interni 1, 2, 3 e 4 del sistema, si sfrutta il fatto che la somma algebrica delle portate nel nodo j-esimo deve essere nulla (una portata positiva indica che l'acqua entra nel nodo, una portata negativa indica che l'acqua ne esce).

Denotando con $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$ il vettore delle pressioni nei nodi interni, si ottiene un sistema di 4 equazioni e 4 incognite della forma $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$.

A partire dai seguenti dati

condotta	k	L
1	0.010	20
2	0.005	10
3	0.005	14
4	0.005	10
5	0.005	10
6	0.002	8
7	0.002	8
8	0.002	8
9	0.005	10
10	0.002	8

si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} -0.370 & 0.050 & 0.050 & 0.070 \\ 0.050 & -0.116 & 0 & 0.050 \\ 0.050 & 0 & -0.116 & 0.050 \\ 0.070 & 0.050 & 0.050 & -0.202 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si costruisca uno script `idrascript.m` che

- legga da file esterno di nome `idra.dat` (dati strutturati in 4 righe e 5 colonne, e fornito dai docenti) la matrice aumentata $(A|\mathbf{b})$ e memorizzi poi separatamente la matrice `A` ed il vettore termine noto `b`;
- verifichi che la matrice A sia quadrata;
- calcoli le matrici della fattorizzazione di Gauss **con pivoting** con il comando Matlab

  ```
  [L,U,P]=lu(A)
  ```

- risolva il sistema $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ utilizzando tale fattorizzazione (si ricordi che $P \times A = L \times U$) e le due function `triinf` e `trisup`, calcolando la soluzione $\mathbf{p}$;
- calcoli la soluzione dello stesso sistema (assegnandola ad un **altro** vettore) con il comando Matlab

  ```
  A\b
  ```

- visualizzi la matrice `A`, il vettore `b`, la dimensione del sistema, il vettore soluzione ottenuto utilizzando la risoluzione dei sistemi triangolari, il vettore soluzione ottenuto utilizzando l'operatore Matlab \, e la norma della differenza tra i due vettori soluzione.