CALCOLO NUMERICO

Prova esame

N.B. si eseguano i calcoli con almeno 5 cifre significative

1. Si consideri la seguente equazione non lineare:

$$\frac{3e^x}{4} - x^2 - \frac{3}{4} = 0$$

   (a) Partendo dal punto iniziale $x_0 = -0.5$, determinare le prime tre approssimazioni x_1, x_2, x_3 della soluzione α ottenute con lo schema di Newton-Raphson. Stimare il fattore di convergenza.

   (b) Dati i seguenti schemi di punto fisso:

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{3(e^{x_k} - 1)}{4}} \tag{1}$$

$$x_{k+1} = \ln\left(\frac{4}{3}x_k^2 + 1\right) \tag{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3}{4}e^{x_k} + x_k^2 + \frac{3}{4} \tag{3}$$

   dire se convergono a α e, in caso affermativo, determinare ordine e fattore di convergenza.

   (c) Per lo schema, o gli schemi, di punto fisso del punto precedenza con convergenza lineare, calcolare il numero di iterazioni necessario in condizioni asintotiche per abbattere l'errore di 8 ordini di grandezza.

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -3 \\ 16 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare una opportuna permutazione di righe o colonne in modo che la matrice del sistema possa essere fattorizzata alla Choleski, e determinare il nuovo sistema lineare $By = c$;

   (b) calcolare la fattorizzazione di Choleski di B;

   (c) usando tale fattorizzazione, trovare la soluzione x del sistema iniziale;

   (d) sempre usando la fattorizzazione di Choleski trovata prima, dire quanto vale $\det(A^{-1})$.

3. Metodo di Newton per la soluzione del problema $f(x) = 0$:

   (a) discutere esistenza e unicità della soluzione nell'intervallo $[a, b]$;

   (b) ricavare il metodo di Newton;

   (c) ricavare ordine, costante asintotica e condizioni di convergenza.

Tempo a disposizione: 2 ore
Voti: 10, 10, 10

Soluzioni

1. Vogliamo trovare gli zeri di
$$f(x) = \frac{3e^x}{4} - x^2 - \frac{3}{4} = 0.$$

   (a) Osserviamo che:
   - la funzione $f(x)$ è continua (ed ha uno zero in $\alpha = 0$)
   - la sua derivata è $\frac{3}{4}e^x - 2x$ ed è continua

   Possiamo quindi usare lo schema di Newton Raphson:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
   per calcolare le prime 3 iterazioni x_1, x_2, x_3 a partire de a $x_0 = -0.5$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	-0.5	-5.4510×10^{-1}	1.4549×10^{0}	3.7467×10^{-1}
1	-1.2533×10^{-1}	-1.0406×10^{-1}	9.1232×10^{-1}	1.1406×10^{-1}
2	-1.1276×10^{-2}	-8.5369×10^{-3}	7.6414×10^{-1}	1.1172×10^{-2}
3	-1.0447×10^{-4}	-7.8358×10^{-1}	7.5013×10^{-1}	1.0446×10^{-4}

   Sappiamo che per $k \to \infty$ si ha
$$\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k^2} \to M$$
   con $p = 2$ ordine di convergenza, M fattore di convergenza, e $\epsilon_k = |\alpha - x_k|$.
   Non conoscendo a priori α, si usa lo scarto al posto dell'errore dato che so che per NR lo scarto è una maggiorazione dell'errore:
$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x_{k-1}|^2} = \frac{|x_3 - x_2|}{|x_2 - x_1|} = 0.85878$$

   (b) Dati gli schemi di punto fisso:
$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{3(e^{x_k} - 1)}{4}} = g_1(x_k)$$
$$x_{k+1} = \ln\left(\frac{4}{3}x_k^2 + 1\right) = g_2(x_k)$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{3}{4}e^{x_k} + x_k^2 + \frac{3}{4} = g_3(x_k)$$
   Osserviamo che per tutti e tre gli schemi si ha $\alpha = g_i(\alpha)$ (con $\alpha = 0$).
   Sappiamo che dobbiamo studiare le 3 derivate delle g_i per sapere se convergono, e in particolare:
$$\text{se } g'(\alpha) \neq 0 \quad \longrightarrow p = 1 \quad \text{e} \quad M = |g'(\alpha)|$$
$$\text{se } g'(\alpha) = 0 \quad \longrightarrow p = 2 \quad \text{e} \quad M = \frac{1}{2}|g''(\alpha)|$$
   - Lo schema $x_{k+1} = g_1(x_k)$ non converge:
$$g_1'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}(e^x - 1)}}\frac{3}{4}e^x \qquad g_1'(0) \to \infty$$

- Lo schema $x_{k+1} = g_2(x_k)$ converge con $p = 2$:

$$g_2'(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}x^2 - 1}\frac{8}{3}x \qquad g_2'(0) = 0$$

$$\underbrace{g_2''(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}x^2 - 1\right)^{-3/2}\left(\frac{8}{3}x\right)^2 + \frac{1}{\frac{4}{3}x^2 - 1}\frac{8}{3}}_{(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'} = -\frac{8}{3} \neq 0$$

La costante asintotica quindi è:

$$M = \frac{1}{2}|g_2''(0)| = \frac{1}{2}\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

(può essere $M > 1$ perché siamo nel caso $p = 2$)

- Lo schema $x_{k+1} = g_3(x_k)$ converge con $p = 1$:

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}e^x + 2x + 1 \qquad g_3'(0) = \frac{1}{4}$$

con $M = |g'(0)| = \frac{1}{4}$.

(c) Per lo schema $x_{k+1} = g_3(x_k)$ (unico di punto fisso tra i 3 proposti) vogliamo calcolare il numero minimo di iterazioni k necessari per abbattere l'errore di 8 ordini di grandezza:
Sappiamo che $|\epsilon_k| = M|\epsilon_{k-1}| = \ldots = M^k|\epsilon_0|$, quindi vogliamo che:

$$|\epsilon_k| = M^k|\epsilon_0| \leq 10^{-8}|\epsilon_0|$$

$$\implies \quad k \log_{10} M \leq -8\underbrace{\log_{10} 10}_{1}$$

$$k \underbrace{\log_{10} 0.25}_{<0} \leq -8 \quad \implies \quad k \geq \frac{-8}{\log_{10} 0.25} \geq 13.29$$

Quindi, sono necessarie $k = 14$ iterazioni per abbattere l'errore iniziale $|\epsilon_0|$ di 8 ordini di grandezza.

2. Dato il sistema lineare $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -3 \\ 16 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(a) Per applicare il metodo di fattorizzazione di Choleski abbiamo bisogno di una matrice simmetrica definita positiva. Iniziamo applicando alla matrice A la permutazione della prima e seconda riga, in modo da ottenere B simmetrica e c il corrispettivo termine noto modificato:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che la matrice B è dominante diagonale (in senso stretto) e quindi definita positiva. Il nuovo sistema sarà proprio $By = c$.

(b) Calcoliamo la matrice triangolare inferiore L per cui $B = LL^T$ è la decomposizione di Choleski di B:

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Il sistema iniziale $Ax = b$ equivale quindi a $LL^T y = c$, che può essere suddiviso nei due sistemi di immediata risoluzione $Lz = c$ e $L^T y = z$:

$$Lz = c \qquad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$L^T y = z \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x$$

Il vettore x si ottiere permutando di nuovo prima e seconda componente, ma in questo caso equivale a y.

(d) Con il metodo di Choleski si ha che

$$\det(B) = \prod_{i=1}^{3} l_{ii}^2,$$

che nel nostro caso corrisponde a $\det(B) = 36^2 = 1296$. Per cui, sapendo che $\det(A) = \det(P)\det(B) = -1296$, (Teorema di Binet - proprietà del determinante) si ha

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = -1/1296.$$