UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

DIPARTIMENTO MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Laboratorio di Calcolo Numerico LAB 8

Integrazione numerica: formule di quadratura composte

Docenti: E. Bachini, L. Bruni

Email: elena.bachini@unipd.it Email: bruni@math.unipd.it

24 aprile 2024

Outline

Formule di quadratura numerica

Sia data la funzione continua f nell'intervallo $[a, b]$ e si supponga di dover calcolare numericamente

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Vogliamo calcolare l'integrale usando le formule di quadratura numerica lineare e quadratica.

$$I(f) \approx I_n(f)$$

dove $I_n(f)$ è l'integrale calcolato numericamente con

- Formula dei trapezi composta $I_n^t(f)$
- Formula di Cavalieri-Simpson composta $I_n^s(f)$

Formula dei trapezi composta

Tale quantità è approssimabile mediante la formula dei trapezi composta

$$I(f) \approx I_n^t(f) = I(\Pi_1^c) = \int_a^b \Pi_1^c(x)dx = \sum(aree\_trapezi)$$

ove Π_1^c è il polinomio interpolante a tratti di grado 1 (lineare).
Ossia supponendo di dividere $[a, b]$ in m intervalli, otterremo $m+1$ punti di integrazione $x_0, x_1, ..., x_m$ e l'integrale sarà:

$$I_n(f) = \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)}_{\text{area trap. 1}} + \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)}_{\text{area trap. 2}} + ... + \underbrace{\frac{h}{2}\left(f(x_{m-1}) + f(x_m)\right)}_{\text{area trap. m}}$$

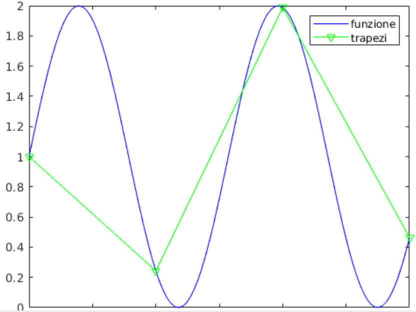
Formula dei trapezi composta

Quindi

$$I_n^t(f) = \sum_{1}^{m+1} w_i f(x_i)$$

- $w_0 = w_m = h/2$
- $w_i = h \quad \text{per} \quad i = 1, ..., m-1$

Si consideri ad esempio di voler calcolare l'integrale della funzione blu usando $m = 3$ intervalli. L'integrale ottenuto usando la formula dei trapezi (quadratura lineare) sará quindi la somma delle aree dei tre trapezi verdi



Formula di Cavalieri-Simpson

Volendo invece usare una formula di quadratura quadratica, si ottiene la formula di Cavalieri-Simpson

$$I(f) \approx I_n^s(f) = I(\Pi_2^c) = \int_a^b \Pi_2^c(x)dx = \sum(aree\_trap\_quadratici)$$

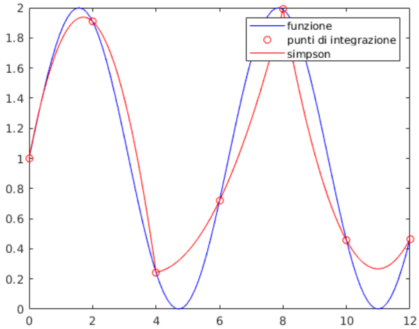
ove Π_2^c è il polinomio interpolante a tratti di grado 2 (quadratico). Ossia supponendo di dividere $[a, b]$ in m intervalli di ampiezza $H = 2h$, dove h è l'ampiezza del semi intervallo (distanza tra due punti di integrazione). Infatti ogni intervallo avrá 3 punti di integrazione per un totale di $2m + 1$ punti $(x_0, x_1, ...x_{2m})$ e l'integrale sarà:

$$I_n(f) = \underbrace{\frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)}_{\text{area trap. 1}} + \underbrace{\frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)}_{\text{area trap. 2}} + ...$$

$$... + \underbrace{\frac{h}{3}\left(f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\right)}_{\text{area trap. m}}$$

Formula di Cavalieri-Simpson composta

Si consideri ad esempio di voler calcolare l'integrale della funzione blu usando $m = 3$ intervalli. L'integrale ottenuto usando la formula di Cavalieri-Simpson (quadratura quadratica) sará quindi la somma delle aree dei tre "trapezi quadratici" rossi



Esercizio 1 - con consegna

Vogliamo calcolare numericamente il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/4} \sin x^2 \, \mathrm{d}x$$

- Scrivere un algoritmo per implementare il metodo di trapezi composto
- Creare una function `trapezi.m` che implementa tale algoritmo (vedi slide successive per specifiche)
- Testare la function utilizzandola in uno script `trapeziscript.m` (vedi slide successive per specifiche)

Esercizio 1 - Function `trapezi.m`

Intestazione della function (con indicati input e output):

```
function int = trapezi (f,a,b,m);
%TRAPEZI Metodo dei Trapezi composto
%
% int = trapezi (f,a,b,m);
%
% Dati di ingresso:
%   f:      funzione integranda (anonymous function)
%   a:      estremo sinistro dell'intervallo di integrazione
%   b:      estremo destro dell'intervallo di integrazione
%   m:      numero di sottointervalli (intero)
%
% Dati di uscita:
%   int:    valore di approssimazione dell'integrale definito
```

Esercizio 1 - Script `trapeziscript.m`

Lo script deve:

- assegnare la funzione f, gli estremi a e b dell'intervallo di integrazione, il valore m relativo alla prima suddivisione dell'intervallo (si scelga `m = 3`)
- costruire le approssimazioni successive I_n per $n = 1, 2, \ldots$, ottenute raddoppiando il numero di sottointervalli e memorizzandole in un vettore di nome `intvec`. Posta uguale a `diff` la quantità $|I_n - I_{n-1}|$, le iterazioni sono arrestate quando `diff` $<$ `toll`, con `toll` $= 10^{-8}$ tolleranza prefissata. Nel ciclo `while` si inserisca anche un controllo sul numero massimo di iterazioni possibile, definendo come dato `nmax =15`
- visualizzare i risultati ottenenuti e scriverli su file

Esercizio 1 - Stampa risultati su `risultati.txt` (continua...)

- stampare su un file esterno `risultati.txt`, i dati di ingresso

```
Funzione integranda = ....
Intervallo di integrazione = [ ... , ... ]
Tolleranza toll = 1e-008
Suddivisione iniziale m = 3
Passo iniziale h =  ...
Numero massimo di iterazioni nmax = 15
```

Esercizio 1 - Stampa risultati su `risultati.txt`

- stampare i dati di output in una tabella di 4 colonne che deve contenere in ogni riga i seguenti valori: `m(n)`, `h(n)` (formato esponenziale con 6 cifre significativa), `intvec(n)` (approssimazione dell'integrale in formato fixed point con 16 cifre significative dopo il punto di radice), `diff(n)` (formato esponenziale con 6 cifre significative)

```
   m         h           Integrale       diff


   3      2.61799e-01  0.1645288485905887
   6      1.30900e-01  0.1589877445250193  5.5411e-03
  12      6.54498e-02  0.1576122791453864  1.3755e-03
  24      3.27249e-02  0.1572690292441272  3.4325e-04
  48      1.63625e-02  0.1571832553420358  8.5774e-05
  96      8.18123e-03  0.1571618142780281  2.1441e-05
 192      4.09062e-03  0.1571564541627566  5.3601e-06
 384      2.04531e-03  0.1571551141433596  1.3400e-06
 768      1.02265e-03  0.1571547791390989  3.3500e-07
1536      5.11327e-04  0.1571546953880709  8.3751e-08
3072      2.55663e-04  0.1571546744503158  2.0938e-08
6144      1.27832e-04  0.1571546692158775  5.2344e-09
```

Esercizio 1 - Calcolo errori e plot

- Calcolare nello script anche il valore di riferimento della soluzione esatta utilizzando l'istruzione Matlab

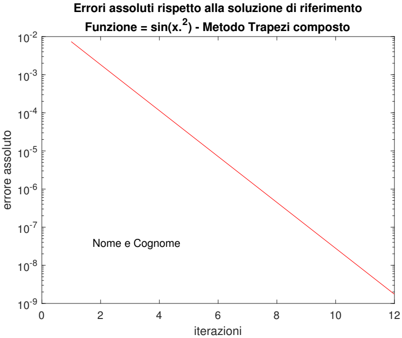
  ```
  q = integral(f,a,b);
  ```

  e memorizzarlo nella variabile `q`
- Visualizzarlo

  ```
  Valore integrale di riferimento q =   0.157154667471064 6
  ```
- Fare il grafico degli errori: una figura che contenga, in scala logaritmica sull'asse delle ordinate, la **successione degli errori assoluti** ottenuta considerando le approssimazioni successive ed il valore di riferimento `q`, ovvero `abs(q-intvec(n))` (La figura deve essere corredata da opportuni titoli (cognome, funzione integranda, metodo, . . .), e label degli assi.
- Si salvi tale figura (formato ed estensione `.pdf`) con nome `grafico`.

Esercizio 1 - Grafico degli errori (esempio)

Si dovrebbe ottenere qualcosa di simile a



Esercizio 1 - consegna

Si crei un file .zip con i codici creati e il grafico ottenuto. Si rinomini lo zip (**cognome_nome_lab8.zip**) e si carichi su moodle.

Esercizio 2 - Algoritmo Treottavi

La nota formula di Cavalieri-Simpson vista utilizza l'interpolazione con un polinomio di grado al più 2. Esiste anche una formula (chiamata *seconda formula di Simpson* oppure *formula dei 3/8*) dove viene utilizzata l'interpolazione con un polinomio di grado al più 3. **Formula dei 3/8**: i 4 valori che la funzione assume nei punti della discretizzazione in 3 parti dell'intervallo di integrazione, hanno rispettivamente i coefficienti $1, 3, 3, 1$.

Nella sua forma composta si deve suddividere l'intervallo $[a, b]$ in un numero m di parti che **deve essere multiplo di 3**. Indicato, $h = (b - a)/m$ tale formula si esprime come:

$$I_n = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \right.$$
$$\left. 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \cdots + 3f(x_{m-2}) + 3f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]$$

Esercizio: Scrivere l'algoritmo in **pseudocodice** (contenente i necessari controlli sul valore di m)

$$[I^*] = \text{Treottavi}\ (f, a, b, m)$$