APPROFONDIMENTO 1

SIANO $v_1, \dots, v_m \in V$ VETTORI.

<u>DOMANDA</u>: COME TROVO <u>QUANTI</u> E <u>QUALI</u> SONO QUELLI TRA LORO LINEARMENTE INDIPENDENTI?

PER DEF.: SE

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

ALLORA $\{v_1, \dots, v_m\}$ LIN. INDIP.

ALTRIMENTI <u>NO</u>!

INFATTI, SUPPONIAMO CHE $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2 \neq 0 \\ \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_m = 0 \end{array}$

QUESTO SIGNIFICA CHE HO (AD ES.) M-2 VETTORI LIN. INDIP., POICHÉ

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\downarrow \ \alpha_1, \alpha_2 \neq 0$$

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$$

OPPURE ANCHE

$$v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} v_3 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_2} v_m$$

v_1, v_2 DIPENDONO LINEARMENTE DA $\{v_3, \dots, v_m\}$

QUESTO <u>NON</u> LO POSSO FARE PER $v_3, \dots, v_m$ POICHÉ

$\alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$

QUINDI $\{v_3, \dots, v_m\}$ LIN. INDIP. MENTRE v_1, v_2 NO!

<u>ESEMPIO 1</u>:

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

RISOLVO:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

v_1, v_2, v_3 LIN. INDIP.

ESEMPIO 2:

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases} \rightarrow$$

α_3 NON È FISSATO E PUÒ ASSUMERE VALORI QUALSIASI, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$

INFATTI:

$$\alpha_3 v_3 = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2$$

$$v_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} v_2 = v_1 + v_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3} = 1 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

COME TROVATO SOPRA!

QUESTO METODO CONSISTE NELL'UTILIZZO DIRETTO DELLA DEF.,

C'È UN METODO MIGLIORE?

SÌ, POSSIAMO PRENDERE I VETTORI $v_1, \dots, v_n$ E METTERLI IN COLONNA (OPPURE IN RIGA), INFATTI

NELL'ESEMPIO 2 (METTENDOLI IN COLONNA):

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array} \rightarrow 2 \text{ PIVOT}$$

NELL'ESEMPIO 1 (METTENDOLI IN ~~RIGA~~ COLONNA):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 3 \text{ PIVOT}$$

SE CONSIDERO ~~A~~ I VETTORI (ESEMPIO 3):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

UNO PUÒ VERIFICARE (USANDO LA REF) CHE SONO LIN. INDIP., IN EFFETTI SI TROVA CHE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{DI GAUSS}]{\text{RIDUZIONE}} \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

↑ 3 PIVOT

CONSIDERIAMO INVECE (ESEMPIO 4):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

SI VEDE AD OCCHIO CHE $v_1 + v_2 = v_3$ E CHE v_1, v_2 SONO LIN. INDIP. (USARE LA REF PER CONFERMA).

MATRICIALMENTE, NOTIAMO CHE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{DI GAUSS}]{\text{RIDUZIONE}} \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~SEMBRA~~

↓

DUNQUE, SEMBRA CHE IL N° DI VETTORI LIN. INDIP. CORRISPONDA AL N° DI PIVOT(S) DELLA MATRICE OTTENUTA METTENDO I VETTORI IN COLONNA.

PER DI PIÙ, I VETTORI CHE SONO TRA LORO LIN. INDIP. SEMBRA SIANO PROPRIO QUELLI IN CORRISP. DEI PIVOT(S).

COME POSSIAMO MOSTRARE CHE CIÒ È (SEMPRE) VERO? (AL DI LÀ DEGLI ESEMPI SPECIFICI MOSTRATI SINORA)

~~RICORDIAMO CHE~~

RICORDIAMO CHE NOI VOGLIAMO RISOLVERE IL SISTEMA

$$\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix}}_{= v_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix}}_{= v_2} + \dots + \alpha_m \underbrace{\begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix}}_{= v_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

PER VEDERE LA RELAZIONE DI DIPENDENZA/INDIPENDENZA LINEARE TRA $v_1, \dots, v_m$.

QUESTO SISTEMA È UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO E SI PUÒ RISOLVERE COME $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} =$

$$\cancel{\begin{pmatrix} - - - v_1 - - - \\ - - - v_2 - - - \\ \vdots \\ - - - v_m - - - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

DAL TEOREMA DI ROUCHÉ CAPELLI, SAPPIAMO CHE UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO HA SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE CHE È QUELLA NULLA

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

LA DOMANDA DIVENTA QUINDI:
RIUSCIAMO A CAPIRE QUANDO $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ È L'UNICA SOLUZIONE E QUANDO CI SONO ANCHE ALTRE (∞) SOLUZIONI?

SI, DAL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

SE $\underbrace{rg(A)}_{\substack{\| \\ \#\text{ di pivot di una forma a scala di } A}} = \underbrace{m}_{\substack{\| \\ \#\text{ di variabili}}} \longrightarrow \exists!$ SOLUZIONE, IN TAL CASO ESSA È $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

SE $rg(A) < m \longrightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE ∞ SOLUZIONI CON # di variabili libere di variare $= m - rg(A)$

SAPENDO CIÒ, E SAPENDO CHE LA RIDUZIONE DI GAUSS NON ALTERA ~~IL SISTEMA~~ L'INSIEME DI SOLUZIONI PER SISTEMA $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$, ALLORA È NATURALE CALCOLARE IL RANGO DI A (OVVERO # DI PIVOT) PER CAPIRE QUANTI VETTORI LIN. INDIP. CI SONO TRA LORO.
COME FACCIO ORA A CAPIRE QUALI SONO? ~~[illegible]~~ I VETTORI ~~[illegible]~~ CORRISP. AI PIVOT(S) HANNO LA FORMA (POST-RIDUZIONE DI GAUSS)

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & & * \\ \vdots & 0 & * & \cdots & * \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

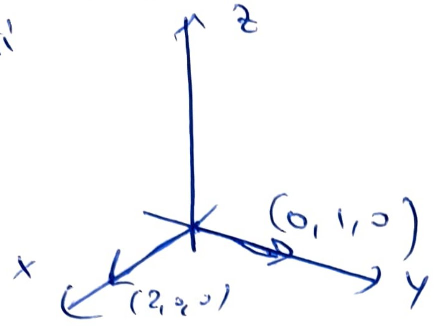
AD ESEMPIO $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ I VETTORI $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ SONO QUELLI CORRISP. AI PIVOT E

SONO LIN. INDIP A VISTA!

ESSI "PUNTANO" LUNGO DIREZIONI DIVERSE"

A CAUSA DELLA CONFIGURAZIONE DEGLI ZERI,

~~AD~~ INFATTI

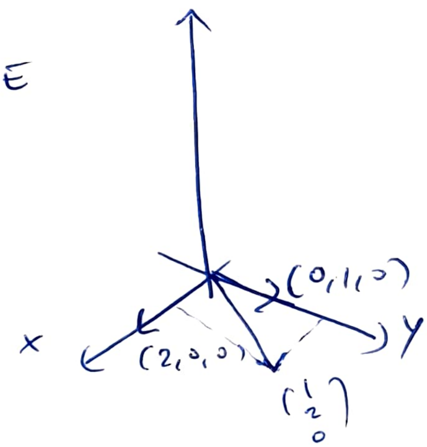


E SONO DUNQUE LIN. INDIP.

LO STESSO NON SI PUÒ DIRE DEL VETTORE RIMANENTE $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

INFATTI $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

GEOMETRICAMENTE



INFATTI (2,0,0), (0,1,0) GENERANO IL PIANO 2D (X,Y)

E (1,2,0) APPARTIENE A QUESTO PIANO!

IN CONCLUSIONE,
ABBIAMO IMPARATO CHE LA VERIFICA DELLA LINEARE INDIPENDENZA SI PUÒ FARE TRAMITE ELIMINAZIONE DI GAUSS A PARTIRE DA UNA MATRICE AVENTE PER COLONNA I VETTORI.

POTREI ANCHE METTERLI IN RIGA E IL RISULTATO (CIOÈ IL RANGO = # DI PIVOT) NON CAMBIA.

⚠! SE METTI I VETTORI IN RIGA CONSIGLIO DI NON FARE SCAMBI TRA RIGHE SE SI È INTERESSATI A CAPIRE QUALI VETTORI SONO LIN. INDIP, INFATTI SE SI FANNO SCAMBI TRA RIGHE CI SI PUÒ CONFONDERE SU QUALI (TRA I VETTORI INIZIALI) CORRISPONDANO AI PIVOT.