Esercizio 5.16 ✓

Dato l'intervallo $[-1, 1]$, si scrivano (in aritmetica esatta) i nodi di Chebyshev necessari per costruire il polinomio interpolante $P_3 \in \mathcal{P}_3$ di una funzione f, nota in forma analitica.

IDENTIFICAZIONE NODI

Polinomio interpolante $P_3 \in \mathcal{P}_3 \implies n+1 = 4$ (numero nodi)

$n = 3$

Intervallo $[-1,1]$, nodi di Chebyshev:

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{2(n+1)} \pi \qquad i = 0, \dots, n \qquad n = 3$$

$n = 3 \implies 2(n+1) = 8$

i	x_i	
0	$x_0 = \cos \frac{0+1}{8} \pi = \cos \pi/8$	$\simeq 0,924$
1	$x_1 = \cos \frac{2 \cdot 1 + 1}{8} \pi = \cos 3/8 \pi$	$\simeq 0,383$
2	$x_2 = \cos \frac{2 \cdot 2 + 1}{8} \pi = \cos 5/8 \pi$	$\simeq -0,383$
3	$x_3 = \cos \frac{2 \cdot 3 + 1}{8} \pi = \cos 7/8 \pi$	$\simeq -0,924$

notare simmetria rispetto a ZERO

Esercizio 6.9

(Da svolgere in aritmetica esatta). Siano dati i seguenti nodi e valori di una funzione

x_i	-2	0	-1
$f(x_i)$	9	1	4

1. Si calcoli l'approssimazione ai minimi quadrati polinomiale di grado $n = 2$ (parabola) con i nodi e valori assegnati (pesi tutti unitari). Per far ciò
   (a) Si costruisca a partire dai valori dati il sistema delle equazioni normali.
   (b) Si calcolino i coefficienti a_0, a_1 ed a_2 e si scriva il polinomio ai minimi quadrati.
2. Si calcoli l'errore quadratico.
3. Si consideri il polinomio $P_2(x)$ che interpola la funzione negli stessi nodi, calcolato nell'esercizio **5.24**. Il polinomio ai minimi quadrati ed il polinomio interpolatore coincidono? Si giustifichi la risposta affermativa o negativa indicandone le ragioni.

i	x_i	$f(x_i) = y_i$	w_i
0	-2	9	1
1	0	1	1
2	-1	4	1

MIGLIORE APPROSSIMAZ. MINIMI QUADRATI:
(scelta classe $\mathcal{F}$ di funzioni)

$$\sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - g^*(x_i)\right)^2 w(x_i) = \min_{g \in \mathcal{F}} \sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2 w(x_i)$$

$g^*(x)$ ESISTE UNICA se $\mathcal{F}$ sottospazio vettoriale generato da base di $(n+1)$ elementi (con $n \leq m$) linearmente indipendenti

$g^*(x) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \equiv \mathbb{P}_2$

base : $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$

$\forall\, g(x) \in \mathcal{F}$ si ha :

$$g(x) = a_0 \cdot g_0(x) + a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x)$$

Costruiamo matrice $\underline{\underline{A}}$ e vettore termini noti $\underline{b}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} & \sqrt{\omega_0} \cdot x_0 & \sqrt{\omega_0} \cdot x_0^2 \\ \sqrt{\omega_1} & \sqrt{\omega_1} \cdot x_1 & \sqrt{\omega_1} \cdot x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\omega_m} & \sqrt{\omega_m} \cdot x_m & \sqrt{\omega_n} \cdot x_m^2 \end{pmatrix} \qquad (m+1) \times 3$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} \cdot f(x_0) \\ \sqrt{\omega_1} \cdot f(x_1) \\ \vdots \\ \sqrt{\omega_n} \cdot f(x_m) \end{pmatrix} \qquad (m+1) \times 1$$

i	x_i	y_i	ω_i
0	-2	9	1
1	0	1	1
2	-1	4	1

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.a) Costruire il sistema delle <u>EQUAZIONI NORMALI</u>

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{b} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{\underline{A}}^T \underline{b}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad g^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -9 \\ 5 & -9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -22 \\ 40 \end{pmatrix}$$

1.b) Calcolare coefficienti a_0, a_1, a_2

Uso Kramer $\longrightarrow$ $a_0 = D_0/D \qquad a_1 = D_1/D \qquad a_2 = D_2/D$

Per snellire notazione definisco: $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \qquad \underline{F} = \underline{\underline{A}}^T \underline{b}$

$$D = \det(\underline{\underline{K}})$$

$$\left(\begin{matrix} 3 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -9 \\ 5 & -9 & 17 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \\ 5 & -9 \end{matrix}$$

$$D = 255 + 135 + 135 - (125 + 243 + 153)$$
$$= 525 - 521 = 4$$

$$D_0 = \det(\underline{\underline{K_0}})$$

$$\underline{\underline{K_0}} = \begin{pmatrix} 14 & -3 & 5 \\ -22 & 5 & -9 \\ 40 & -9 & 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 14 & -3 & 5 \\ -22 & 5 & -9 \\ 40 & -9 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} 14 & -3 \\ -22 & 5 \\ 40 & -9 \end{matrix}$$

$$D_0 = 1190 + 1080 + 990 - (1000 + 1134 + 1122)$$
$$= 3260 - 3256 = 4$$

$$D_1 = \det(\underline{\underline{K_1}})$$

$$\underline{\underline{K_1}} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 5 \\ -3 & -22 & -9 \\ 5 & 40 & 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 14 & 5 \\ -3 & -22 & -9 \\ 5 & 40 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 14 \\ -3 & -22 \\ 5 & 40 \end{matrix}$$

$$D_1 = -1122 - 630 - 600 - (-350 - 1080 - 714)$$
$$= -2352 + 2344 = -8$$

$$D_2 = \det(\underline{\underline{K_2}})$$

$$\underline{\underline{K_2}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 14 \\ -3 & 5 & -22 \\ 5 & -9 & 40 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 14 \\ -3 & 5 & -22 \\ 5 & -9 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \\ 5 & -9 \end{matrix}$$

$$D_2 = 600 + 330 + 378 - (350 + 594 + 360)$$
$$= 1308 - 1304 = 4$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = \frac{4}{4} = 1 \qquad a_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-8}{4} = -2 \qquad a_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{4}{4} = 1$$

Polinomio ai minimi quadrati

$g^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \implies g^*(x) = x^2 - 2x + 1$

2) Errore quadratico

$$E_q = \sum_{i=0}^{m} \left(y_i - g^*(x_i)\right)^2 \cdot w_i$$

i	x_i	y_i	w_i	$g^*(x_i) = x_i^2 - 2x_i + 1$	$(y_i - g^*(x_i))^2$
0	-2	9	1	9	0
1	0	1	1	1	0
2	-1	4	1	4	0

$$E_q = \sum_{i=0}^{2} \left(y_i - g^*(x_i)\right)^2 \cdot w_i = 0$$

3) Polinomio $P_2(x) = x^2 - 2x + 1$ (come da Es. 5.24) interpola la funzione negli stessi nodi.

Approssimazione polinomiale, con $n = 2 \longrightarrow g^*(x)$

Polinomio ai minimi quadrati $g^*(x)$ e polinomio interpolatore $P_2(x)$ COINCIDONO!

$$g^*(x) = P_2(x) = x^2 - 2x + 1$$

$n = m$

$\downarrow$ numero nodi $- 1$

$\downarrow$

grado polinomio

approssimazione polinomiale

e

interpolazione polinomiale

<u>COINCIDONO</u> !

Esercizio 5.25

(Da svolgere in aritmetica esatta). Siano dati i seguenti nodi e valori di una funzione

x_i	-2	2	-1	1
$f(x_i)$	-2	4	1	0

1. Si calcoli il polinomio $P_3(x)$ che interpola la funzione nei nodi, utilizzando la forma di Newton alle differenze divise.
2. Utilizzando il polinomio $P_3(x)$, si valuti per interpolazione un'approssimazione di $f(0)$.
3. Si ricalcoli l'approssimazione di $f(0)$ utilizzando lo schema di Neville Aitken.

1) Polinomio interpolatore $P_3(x)$, Newton differenze divise

Formula di Newton

$$P_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Calcolo coefficienti con Newton differenze divise

$c_0 \longrightarrow$ dipende solo da $f(x_0)$

$c_1 \longrightarrow$ dipende da $f(x_0)$, $f(x_1)$

$\vdots$

$c_n \longrightarrow$ dipende da $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$

$$c_n = \underbrace{f[x_0, x_1, \ldots, x_n]}_{\text{"operatore" DIFFERENZE DIVISE di } f}$$

Differenze divise ORDINE $0, 1, \ldots, n$ della funzione f

Ordine 0 $\quad f[x_i] = f(x_i)$

Ordine 1 $\quad f[x_i, x_j] = \dfrac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$

Ordine n $\quad f[x_0, \dots, x_n] = \dfrac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2	-2
1	2	4
2	-1	1
3	1	0

- 4 nodi $\Rightarrow$ $p_3(x)$
- c_0, c_1, c_2, c_3
- differenze divise ordine 3 al massimo

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$ $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-2	-2	$\dfrac{-2-4}{-2-2} = \dfrac{3}{2}$	$\dfrac{3/2 - 1}{-2+1} = -1/2$	$2/3$ (*)
1	2	4	$\dfrac{4-1}{2+1} = 1$	$\dfrac{1 + 1/2}{2-1} = 3/2$	
2	-1	1	$\dfrac{1-0}{-1-1} = -\dfrac{1}{2}$		
3	1	0			

(*) $\quad \dfrac{-1/2 - 3/2}{-2-1} = 2/3$

coefficienti polinomio (da prima riga tabella)

$c_0 = -2 \qquad c_1 = 3/2 \qquad c_2 = -1/2 \qquad c_3 = 2/3$

$$P_3(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{3} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= -2 + 3/2\,(x+2) - 1/2\,(x+2)(x-2) +$$
$$+ 2/3\,(x+2)(x-2)(x+1)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}$$

2) Approssimazione di $f(0)$ per interpolazione

$$f(0) \simeq P_3(0) = 1/3$$

3) Approssimazione di $f(0)$ con Neville-Aitken

Costruzione polinomi $T_K^{(i)}$:

$$T_0^{(i)}(x) = f(x_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$T_{K+1}^{(i)}(x) = T_K^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+K+1} - x}{x_{i+K+1} - x_i}\left(T_K^{(i+1)}(x) - T_K^{(i)}(x)\right)$$

con $K = 0, \dots, n-1$
$i = 0, \dots, n-K-1$

Valutiamo direttamente approssimazione $P_3(0)$ sostituendo valore "0" dove compare variabile "x"

$$T_0^{(i)}(0) = f(x_i)$$

$$T_{k+1}^{(i)}(0) = T_k^{(i+1)}(0) - \frac{x_{i+k+1}}{x_{i+k+1} - x_i}\left(T_k^{(i+1)}(0) - T_k^{(i)}(0)\right)$$

i	x_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$
0	-2	-2	$4 - \frac{2}{2-(-2)}\left[4-(-2)\right] = 1$
1	2	4	$1 - \frac{-1}{-1-2}(1-4) = 2$
2	-1	1	$0 - \frac{1}{1-(-1)}(0-1) = 1/2$
3	1	0	

$$T_{k+1}^{(i)}(0) = T_k^{(i+1)}(0) - \frac{x_{i+k+1}}{x_{i+k+1} - x_i}\left(T_k^{(i+1)}(0) - T_k^{(i)}(0)\right)$$

i	x_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$	$T_2^{(i)}$
0	-2	-2	1	$2 - \frac{-1}{-1-(-2)}(2-1) = 3$
1	2	4	2	$\frac{1}{2} - \frac{1}{1-2}\left(\frac{1}{2}-2\right) = -1$
2	-1	1	$\frac{1}{2}$	
3	1	0		

$$T_{k+1}^{(i)}(0) = T_k^{(i+1)}(0) - \frac{x_{i+k+1}}{x_{i+k+1} - x_i}\left(T_k^{(i+1)}(0) - T_k^{(i)}(0)\right)$$

i	x_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$	$T_2^{(i)}$	$T_3^{(i)}$
0	-2	-2	1	3	$-1 - \frac{1}{1-(-2)}(-1-3) = \frac{1}{3}$
1	2	4	2	-1	
2	-1	1	$\frac{1}{2}$		
3	1	0			

valore cercato!

$$\boxed{P_3(0) = T_3^{(0)}(0) = \frac{1}{3}}$$

In questo caso si determina il valore del polinomio interpolatore in un punto specifico: $x^* = 0$.

(Non haviamo l'espressione del polinomio interpolatore)

Esercizio 5.27 ✓

Siano dati i seguenti nodi e valori di una funzione

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	1	0.5	0.25

1. Si calcolino, con lo schema di Neville Aitken, i polinomi $P_n(x)$, di grado al più $n = 1, 2$ che interpolano la funzione f, rispettivamente, nei primi due e tre nodi.
2. Valutare, utilizzando il polinomio interpolatore $P_2(x)$, un'approssimazione di $f(0.3)$.
3. Si dica se l'approssimazione del punto precedente è calcolata per interpolazione oppure per estrapolazione, giustificando la risposta.
4. Sapendo che la tabella rappresenta una tabulazione della funzione $f(x) = \frac{1}{10x}$, si calcoli l'errore commesso $|E_2(0.3)|$.
5. Si fornisca una maggiorazione di $|E_2(x)|$ valida $\forall x \in [0.1, 0.4]$ e si verifichi che l'errore calcolato nel punto precedente soddisfi tale maggiorazione.

1) Algoritmo Neville-Aitken

dati $(n+1)$ nodi e i valori della funzione in tali nodi si considera polinomio

$T_K^{(i)}(x) \in \mathcal{P}_K$ che interpola f in $x_i, \dots, x_{i+K}$

ovvero tale che

$T_K^{(i)}(x_j) = f(x_j)$ per $j = i, \dots, i+K$

Per definizione $P_n(x) \equiv T_n^{(0)}(x)$

(infatti $T_n^{(0)}(x) \in \mathcal{P}_n$ interpola f in $x_0, \dots, x_n$)

Costruzione $T_K^{(i)}$:

$$T_0^{(i)}(x) = f(x_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$T_{K+1}^{(i)}(x) = T_K^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+K+1} - x}{x_{i+K+1} - x_i} \left(T_K^{(i+1)}(x) - T_K^{(i)}(x) \right)$$

con $K = 0, \dots, n-1$

$i = 0, \dots, n-K-1$

1.1) Polinomio interpolatore $P_1(x)$

$$T_{K+1}^{(i)}(x) = T_K^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+K+1} - x}{x_{i+K+1} - x_i} \left(T_K^{(i+1)}(x) - T_K^{(i)}(x) \right)$$

NODI

i	x_i	$f(x_i)$
1	0,1	1
2	0,2	0,5
3	0,4	0,25

i	x_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$
0	0,1	1	$0{,}5 - \frac{0{,}2 - x}{0{,}2 - 0{,}1}(0{,}5 - 1) = \frac{1}{2}(3 - 10x)$
1	0,2	0,5	$0{,}25 - \frac{0{,}4 - x}{0{,}4 - 0{,}2}(0{,}25 - 0{,}5) = \frac{1}{4}(3 - 5x)$
2	0,4	0,25	

$i = 0$
$K+1 = 1$
$i+K+1 = 1$
$K = 0$

$i = 1$
$K+1 = 1$
$i+K+1 = 2$
$K = 0$

Verifichiamo interpolazione

$$P_1(x) = \frac{1}{2}(3 - 10x)$$

$$P_1(x_0 = 0{,}1) = \frac{1}{2}\left(3 - 10\,\frac{1}{10}\right) = 1 \quad ✓$$

$$P_2(x_1 = 0{,}2) = \frac{1}{2}\left(3 - 10\,\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{2} \quad ✓$$

1.2) Polinomio interpolatore $P_2(x)$

$$T_{K+1}^{(i)}(x) = T_K^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+K+1} - x}{x_{i+K+1} - x_i}\left(T_K^{(i+1)}(x) - T_K^{(i)}(x)\right)$$

i	x_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$	$T_2^{(i)}$
0	0,1	1	$\frac{1}{2}(3-10x)$	(*)
1	0,2	0,5	$\frac{1}{4}(3-5x)$	
2	0,4	0,25		

$i = 0$
$K+1 = 2$
$i+K+1 = 2$
$K = 1$

(*) :

$$T_2^{(0)} = \frac{1}{4}(3 - 5x) - \frac{0{,}4 - x}{0{,}4 - 0{,}1}\left[\frac{1}{4}(3 - 5x) - \frac{1}{2}(3 - 10x)\right]$$

$$= \frac{25}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{7}{4}$$

$i = 0$
$K+1 = 2$
$i+K+1 = 2$
$K = 1$

Verifichiamo interpolazione

$$P_2(x) = \frac{25}{2}x^2 - \frac{35}{4}x + \frac{7}{4}$$

$$P_2(0,1) = \frac{25}{2}\frac{1}{100} - \frac{35}{4}\frac{1}{10} + \frac{7}{4} = 1 \quad \checkmark$$

$$P_2(0,2) = \frac{25}{2}\frac{1}{25} - \frac{35}{4}\frac{1}{5} + \frac{7}{4} = 1/2 \quad \checkmark$$

$$P_2(0,4) = \frac{25}{2}\frac{4}{25} - \frac{35}{4}\frac{2}{5} + \frac{7}{4} = 1/4 \quad \checkmark$$

2+3) Valutare $P_2(0,3)$. Interpolazione o estrapolazione?

$$P_2(0,3) = \frac{25}{2}\frac{9}{100} - \frac{35}{4}\frac{3}{10} + \frac{7}{4}$$

$$= 9/8 - 21/8 + 7/4 = 1/4$$

Interpolazione poiché $0,3 \in [0.1\ ,\ 0.4]$

4) Valutare errore $|E_2(0,3)|$ sapendo che $f(x) = 1/10x$

$$|E_2(0,3)| = |P_2(0,3) - f(0,3)|$$

$$= \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{10}\frac{10}{3} \right| = \frac{1}{12} \simeq 0,083$$

5) Maggiorazione errore $|E_2(x)|$ valida $\forall x \in [0.1, 0.4]$

$$|E_n(x)| \le |\omega_n(x)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \quad \forall x \in [a,b]$$

$E_2(x) \longrightarrow n = 2$

3 termini maggiorazione
$$\begin{cases} \omega_n(x) = \omega_2(x) \\ f^{(n+1)}(x) = f'''(x) \\ (n+1)! = 3! = 6 \end{cases}$$

<u>Termine 1</u>

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1/10)(x - 1/5)(x - 2/5)$$

$$\omega_2(0,3) = (3/10 - 1/10)(3/10 - 1/5)(3/10 - 2/5) = 1/5 \cdot 1/10 \cdot (-1/10) = -1/500$$

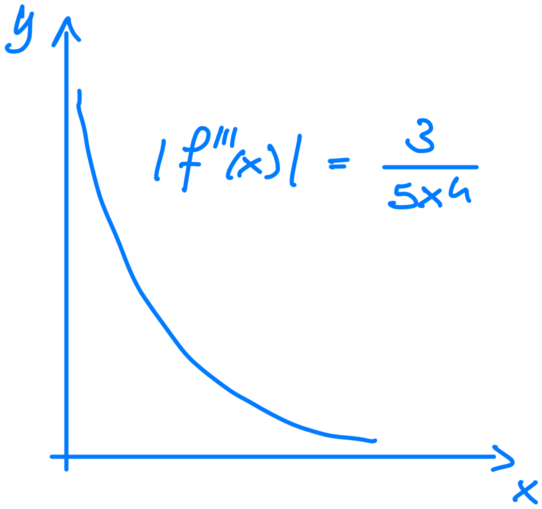
<u>Termine 2</u>

$f(x) = 1/10x$

$f'(x) = -1/10x^2$

$f''(x) = 1/5x^3$

$f'''(x) = -3/5x^4$



$$|f'''(x)| = \frac{3}{5x^4}$$

$$|f'''(0,1)| = \frac{3}{5}\, 10^4 = 6 \cdot 10^3$$

$$|f'''(0,4)| = \frac{3}{5} \cdot \frac{10^4}{4^4} \simeq 2,344 \cdot 10^1$$

$$\max_{x \in [0,1\,,\,0,4]} |f'''(x)| = |f'''(0,1)| = 6 \cdot 10^3$$

<u>Maggiorazione errore</u>

$$|E_2(x)| = \underbrace{\left|\left(x-\tfrac{1}{10}\right)\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\left(x-\tfrac{2}{5}\right)\right|}_{|\omega_2(x)|} \; \underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{1}{(1+2)!}} \; \underbrace{6 \cdot 10^3}_{\max_{x\in[0,1\,,\,0,4]} |f'''(x)|}$$

$$= \underbrace{\left|\left(x-\tfrac{1}{10}\right)\left(x-\tfrac{1}{5}\right)\left(x-\tfrac{2}{5}\right)\right|}_{|\omega_2(x)|} \cdot \underbrace{10^3}_{\frac{1}{3!} \max_{x\in[0,1\,,\,0,4]} |f'''(x)|}$$

Verifichiamo maggiorazione per $x = 0,3$, ovvero che

$$|E_2(0,3)| \leq |\omega_2(0,3)| \max_{x \in [a,b]} \frac{|f'''(x)|}{6!}$$

$$\frac{1}{12} \leq |\omega_2(0,3)| \cdot 10^3 = \frac{1}{500} \cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{12} \leq 2} \quad \checkmark$$

Esercizio 7.15

Si consideri il seguente integrale definito

$$I = \int_0^2 \frac{e^{-x}}{2}\, \mathrm{dx}.$$

1. Si calcolino (almeno 8-9 cifre decimali) con la formula dei Trapezi composta, i valori approssimati dell'integrale definito ottenuti suddividendo l'intervallo in $m_0 = 2$ ed in $m_1 = 4$ parti (per quest'ultima approssimazione si utilizzi il metodo semplificato).
2. Si calcolino gli errori assoluti delle due approssimazioni trovate (in formato esponenziale normalizzato con prima cifra significativa dopo il punto di radice e sole due cifre decimali).
3. Con le precedenti approssimazioni, si applichi il metodo di Romberg (forma semplificata) per ottenere l'approssimazione $T_1^{(0)}$.
4. Si calcoli l'errore assoluto dell'approssimazione di Romberg (in formato esponenziale normalizzato con prima cifra significativa dopo il punto di radice e due cifre decimali).

1) Approssimazioni $T(h_0)$ e $T(h_1)$ con Trapezi composta

$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x}$ $\quad a=0 \quad b=2 \quad b-a=2$

$$\underbrace{m_0 = 2 \qquad h_0 = \frac{b-a}{m_0} = 1}_{I_0} \qquad\qquad \underbrace{m_1 = 4 \qquad h_1 = \frac{b-a}{m_1} = \frac{1}{2}}_{I_1}$$

Intervalli uguali:

$$I = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+i\cdot h) + f(b)\right]}_{T(h)} + R(f)$$

1.1) Valutazione $T(h_0)$ $\quad (h_0 = 1,\ m_0 = 2)$

$$T(h_0) = \frac{h_0}{2}\left[f(a) + 2f(a+h_0) + f(b)\right]$$

x	$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$
$a = 0$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2e}$
$b = 2$	$\frac{1}{2e^2}$

$$T(h_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e^2}\right] = \frac{e^2+2e+1}{4e^2}$$

$$\simeq 0{,}467\ 773\ 541$$

1.2) Valutazione $T(h_1)$ $\quad (h_1 = h_0/2 = 1/2,\ m_1 = 2m_0 = 4)$

Richiesto esplicitamente METODO SEMPLIFICATO

$$T(h_i) = \frac{h_i}{2} S_i$$

$$S_i = f(a) + 2\sum_{j=1}^{m_i-1} f(a+j\cdot h_i) + f(b)$$

$$T(h_{i+1}) = \frac{h_{i+1}}{2} \cdot S_{i+1}$$

$$S_{i+1} = S_i + 2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^{m_{i+1}} f(a + j \cdot h_{i+1})$$

sfruttiamo risultato precedente:

$$T(h_0) = \frac{h_0}{2} S_0 \quad , \quad S_0 = \frac{e^2 + 2e + 1}{2e^2}$$

$$S_1 = S_0 + 2 \cdot \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^{m_1} f(a + j\, h_1)}$$

servono:

$$f(a + h_1) = f(1/2) = \frac{1}{2} e^{-1/2}$$

$$f(a + 3 \cdot h_1) = f(3/2) = \frac{1}{2} e^{-3/2}$$

$$S_1 = \frac{e^2 + 2e + 1}{2e^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{e}(1+e)}{2e^2}$$

$$= \frac{e^2 + 2e(1 + \sqrt{e}) + 2\sqrt{e} + 1}{2e^2}$$

$$T(h_1) = \frac{h_1}{2} \cdot S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_1$$

$$= \frac{e^2 + 2e(1+\sqrt{e}) + 2\sqrt{e} + 1}{8e^2}$$

$$\simeq 0,441\ 301\ 975$$

$T(\mathcal{R}_0) \simeq 0,467\ 773\ 541$

$T(\mathcal{R}_1) \simeq 0,441\ 301\ 975$

2) Errori assoluti approssimazioni $T(\mathcal{R}_0)$ e $T(\mathcal{R}_1)$

Integrale esatto:

$$I = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$$

$$\simeq 0,432\ 332\ 358$$

$$\mathcal{E}_a = |I - T(\mathcal{R}_0)| \simeq 0,35 \cdot 10^{-2}$$

$$\mathcal{E}_a = |I - T(\mathcal{R}_1)| \simeq 0,90 \cdot 10^{-3}$$

3a) Metodo di Romberg (per esteso) approssimazione $T_1^{(0)}$

$$T_0^{(i)} = T(h_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$T_{k+1}^{(i)} = T_k^{(i+1)} - \frac{h_{i+k+1}^2}{h_{i+k+1}^2 - h_i^2} \left(T_k^{(i+1)} - T_k^{(i)} \right)$$

$k = 0, \dots, n-1$

$i = 0, \dots, n-k-1$

i	h_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$
0	1	0,467 773 541	$T_0^{(1)} - \frac{h_1^2}{h_1^2 - h_0^2}\left(T_0^{(1)} - T_0^{(0)}\right)$
1	1/2	0,441 301 975	

$$T_1^{(0)} = 0{,}441\,301\,975 - \frac{(1/2)^2}{(1/2)^2 - 1^2}\left(0{,}441\,301\,975 - 0{,}467\,773\,541\right)$$

$$= 0{,}432\,478\,119$$

3) Applicare Romberg semplificato per ottenere $T_1^{(0)}$

$$T_0^{(i)} = T(h_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$T_{K+1}^{(i)} = \frac{4^{K+1} T_K^{(i+1)} - T_K^{(i)}}{4^{K+1} - 1} \qquad \begin{cases} K = 0, \dots, n-1 \\ i = 0, \dots, n-K-1 \end{cases}$$

$$T_0^{(0)} = T(h_0)$$

$$T_0^{(1)} = T(h_1)$$

$$T_1^{(0)} = \frac{1}{3}\left(4 \cdot T_0^{(1)} - T_0^{(0)}\right)$$

$K+1 = 1$
$i+1 = 1$
$i = 0$

$$T_1^{(0)} = 3\left(4 \cdot \frac{e^2 + 2e(1+\sqrt{e}) + 2\sqrt{e} + 1}{8e^2} - \frac{e^2 + 2e + 1}{4e^2}\right)$$

$$\simeq 0,432\ 478\ 119$$

$$T_1^{(0)} = 0,432\ 478\ 119$$

4) Errore assoluto approssimazione $T_1^{(0)}$

$$\varepsilon_a = |I - T_1^{(0)}| \simeq 0,15 \cdot 10^{-3}$$

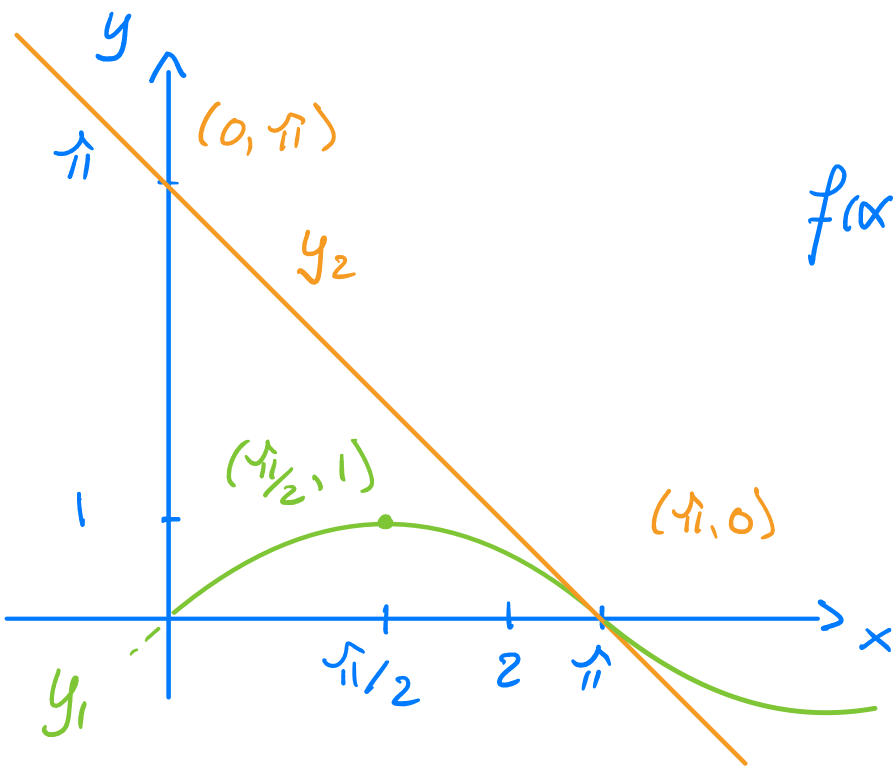
Esercizio 2.21 ✓
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin x + x - \pi.$$

1. Si determini graficamente l'unica soluzione reale dell'equazione $f(x) = 0$.
2. Considerato il punto $x_0 = 2$ si determinino, con il metodo di Newton, le successive tre iterate x_1, x_2 ed x_3 (almeno 8-9 cifre decimali).
3. Si fornisca il residuo rispetto all'ultima iterata ed il valore $|x_3 - x_2|$ (in formato esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice).
4. In quale intervallo di valori dovrebbe essere scelta la tolleranza, affinchè il metodo si arresti a x_3?
5. Poichè la soluzione è determinabile analiticamente (e deducibile anche dalla determinazione grafica) si calcoli l'errore relativo rispetto all'iterata x_3 (formato esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice).
6. Si dica quanto vale la molteplicità della soluzione.

1) $f(x) = 0 \qquad \sin x + x - \pi = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\sin x}_{y_1} = \underbrace{\pi - x}_{y_2}$

$$y_1(x) = y_2(x)$$



$f(\alpha) = 0$ per $\alpha = \pi$

GRAFICI FUNZIONI ELEMENTARI

2) Metodo di Newton: 3 iterate, $x_0 = 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = \sin x + x - \pi$$

$$f'(x) = \cos x + 1$$

ARGOMENTO F.NI TRIGONOMETRICHE in RADIANTI (calcolatrice → RAD)

i	x_i	$f(x_i) = \sin x + x - \pi$	$f'(x_i) = \cos x + 1$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert = \left\lvert \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\rvert$
0	2	−0,232 295 226	0,583 853 163	0,397 865 835
1	2,397 865 835	−0,066 691 457	0,264 049 512	0,252 571 787
2	2,650 437 622	−0,019 510 335	0,118 211 317	0,165 046 254
3	2,815 483 876	−0,005 749 454		

3) Residuo rispetto ultima iterata:

$$f(x_3) = -0,575 \times 10^{-2}$$

Valore $\lvert x_3 - x_2 \rvert$:

$$\lvert x_3 - x_2 \rvert = 0,165 \times 10^{0}$$

4) Tolleranza: intervallo tale da arrestare metodo a x_3 (toll)

i	x_i	$f(x_i) = \sin x + x - \pi$	$f'(x_i) = \cos x + 1$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert = \left\lvert \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\rvert$
0	2	−0,232 295 226	0,583 853 163	0,397 865 835
1	2,397 865 835	−0,066 691 457	0,264 049 512	0,252 571 787
2	2,650 437 622	−0,019 510 335	0,118 211 317	0,165 046 254
3	2,815 483 876	−0,005 749 454		

$$0,165\,046\,254 < \text{toll} < 0,252\,571\,787$$

5) Errore relativo rispetto iterata x_3

$$\alpha = \pi \simeq 3,141\,592\,654$$

$$Er = \frac{|\alpha - x_3|}{|\alpha|} = \frac{|3,141\,592\,654 - 2,815\,483\,876|}{|3,141\,592\,654|}$$

$$\simeq 0,104 \times 10^{0}$$

6) Molteplicità soluzione $\alpha = \pi$

$f(x) = \sin x + x - \pi$ $\qquad$ $f(\alpha) = 0$

$f'(x) = \cos x + 1$ $\qquad$ $f'(\alpha) = 0$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f''(\alpha) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $f'''(\alpha) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ molteplicità 3

Esercizio 1 TE 2022-06-17

Svolgere intero esercizio in ARITMETICA ESATTA

Si consideri la seguente matrice simmetrica

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & n \end{pmatrix}$$

1. Si fattorizzi matrice $\underline{\underline{A}}$ con il metodo di Cholesky, determinando, nel calcolare ℓ_{33}, il più piccolo valore $n \in \mathbb{N}^+$ per cui la matrice risulta essere definita positiva (si ricordi il teorema che fornisce una condizione necessaria affinché una matrice possa essere definita positiva, ed il fatto che la matrice debba essere NON singolare)

2. Utilizzando tale valore si scriva la matrice L

3. Si verifichi che sia $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T$

4. Si calcoli il determinante di $\sqrt{\underline{\underline{A}}}$ utilizzando la fattorizzazione ($\det(\underline{\underline{L}})$? $\det(\underline{\underline{A}})$? $\det(\sqrt{\underline{\underline{A}}})$?)

5. Domanda 1. Si dica per quale ragione, con tale matrice $\underline{\underline{A}}$, si riesca a costruire la matrice $\underline{\underline{L}}$, triangolare inferiore, tale che $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T$.

6. Si dica per quale tipologia di matrici è possibile utilizzare tale metodo (come tutti quelli della stessa classe).

1) Fattorizzazione Cholesky $\underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{A}}$

con

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

(non imponiamo diagonale unitaria)

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}} \qquad i = 2, \dots, n$$

$$\left.\begin{aligned} \ell_{jj} &= \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2\right)^{1/2} \\ \ell_{ij} &= \frac{1}{\ell_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\,\ell_{jk}\right) \quad i = j+1, \dots, n \end{aligned}\right] \to j = 2, \dots, n$$

PRIMA colonna ($j=1$)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & n \end{pmatrix}$$

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\ell_{i1} = a_{i1}/\ell_{11}$$

$i=1$ $\quad \ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3$

$i=2$ $\quad \ell_{21} = a_{21}/\ell_{11} = -3/3 = -1$

$i=3$ $\quad \ell_{31} = a_{31}/\ell_{11} = 3/3 = 1$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & \ell_{22} & 0 \\ 1 & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

SECONDA colonna ($j=2$)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & n \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2 \right)^{1/2}$$

$$\ell_{ij} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \ell_{jk} \right)$$

$i=2$

$$\ell_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{21}^2 \right)^{1/2} = \left(a_{22} - \ell_{21}^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left[2 - (-1)^2 \right]^{1/2}$$

$$= 1$$

$i=3$

$$\ell_{32} = \frac{1}{\ell_{22}} \left(a_{32} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{3k} \ell_{2k} \right)$$

$$= \frac{1}{\ell_{22}} \left(a_{32} - \ell_{31} \ell_{21} \right)$$

$$= 1/1 \left(1 - 1 \cdot (-1) \right)$$

$$= 2$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

TERZA colonna ($j=3$)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & n \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2 \right)^{1/2}$$

$i = 3$

$$\ell_{33} = \left(a_{33} - \sum_{k=1}^{2} \ell_{3k}^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left[a_{33} - \left(\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 \right) \right]^{1/2}$$

$$= \left[n - \left(1^2 + 2^2 \right) \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{n-5}$$

Determinare più piccolo valore $n \in \mathbb{N}^+$ per cui la matrice risulta essere definita positiva

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista la matrice $\underline{\underline{L}}$ triangolare inferiore tale che $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T$, e che tale decomposizione sia unica, è che la matrice $\underline{\underline{A}}$ sia simmetrica definita positiva.

$\underline{\underline{A}}$ simmetrica definita positiva $\iff$ $\exists\, \underline{\underline{L}}$ t.c.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T$$

($\underline{\underline{L}}$ triang. inferiore)

a) Sfrutto teorema soprastante

$$\underline{\underline{L}} \text{ esiste} \iff \ell_{33} \in \mathbb{R}$$

$$\ell_{33} \in \mathbb{R} \iff n-5 \geq 0$$

b) testo esercizio richiede $\underline{\underline{A}}$ matrice NON SINGOLARE

$$\det(\underline{\underline{A}}) \neq 0 \iff \det(\underline{\underline{L}}) \neq 0$$

$$\det(\underline{\underline{L}}) \neq 0 \iff \ell_{11}, \ell_{22}, \ell_{33} \neq 0$$

c) richiesto più piccolo $n \in \mathbb{N}^+$

$$a) + b) + c) \implies n > 5 \implies n = 6$$

2) Si scriva matrice $\underline{\underline{L}}$

$$n = 6 \implies \ell_{33} = \sqrt{n-5} = 1$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Verificare $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T$

$$\underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Si calcoli il determinante di $\sqrt{\underline{\underline{A}}}$ utilizzando la fattorizzazione

$$\det(\underline{\underline{L}}) = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T) = \left(\det(\underline{\underline{L}})\right)^2 = 9$$

$$\det(\sqrt{\underline{\underline{A}}}) = \sqrt{\det(\underline{\underline{A}})} = 3$$

sia $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{F}}$

$$\det(\underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}}) \cdot \det(\underline{\underline{F}})$$

$\Rightarrow$ posso pensare $\underline{\underline{A}} = \sqrt{\underline{\underline{A}}} \times \sqrt{\underline{\underline{A}}}$

$$\det \underline{\underline{A}} = \det(\sqrt{\underline{\underline{A}}} \times \sqrt{\underline{\underline{A}}}) = \det(\sqrt{\underline{\underline{A}}}) \cdot \det(\sqrt{\underline{\underline{A}}})$$

$$\det(\sqrt{\underline{\underline{A}}}) = \sqrt{\det \underline{\underline{A}}}$$

5) Per quale ragione si riesce a costruire
$\underline{\underline{L}}$ tale che $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \times \underline{\underline{L}}^T$?

- $\underline{\underline{A}}$ matrice: - SIMMETRICA
  - DEFINITA POSITIVA
    (abbiamo scelto n in modo da evitare argomento radice quadrata negativo durante calcolo ℓ_{33})

6) Per quale tipologia di matrici è utilizzabile tale metodo (come tutti quelli stessa classe)

Metodo appartiene classe dei METODI DIRETTI.
Metodi diretti si applicano soprattutto a matrici di ordine non elevato (problemi di "piccole" dimensioni).

Esercizio 3.28

(Da svolgere in aritmetica esatta). Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}.$$

1. Si fattorizzi tale matrice nella forma $A = L \times U$, utilizzando le formule compatte di Gauss oppure quelle di Gauss-Doolittle. + Gauss - Crout
2. Si verifichi che il prodotto $L \times U$ restituisca la matrice A.

1) $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}_1 \underline{\underline{U}}_1$ CON FORMULE COMPATTE di GAUSS

$\underline{\underline{L}}_1$: triangolare inferiore a <u>DIAGONALE UNITARIA</u>

$\underline{\underline{U}}_1$: triangolare superiore qualsiasi

calcolo alternativamente COLONNA di $\underline{\underline{U}}$

COLONNA di $\underline{\underline{L}}$

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \qquad i = 1, \dots, j \\ l_{jj} &= 1 \\ l_{ij} &= \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \qquad i = j+1, \dots, n \end{aligned}\right\} \; j = 1, \dots, n$$

<u>STRUTTURA MATRICI FATTORIZZAZIONE</u>

$\underline{\underline{A}}$ 3×3

$$\underline{\underline{L}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

PRIMA colonna $\underline{\underline{U}}_1$ / PRIMA colonna $\underline{\underline{L}}_1$ $(j=1)$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$l_{jj} = 1$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \right)$$

$i=1 \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k}\, u_{k1} = a_{11} = 1/2$

$i=1 \quad l_{11} = 1$

$i=2 \quad l_{21} = \frac{1}{u_{11}} \left(a_{21} - \sum_{k=1}^{0} l_{2k}\, u_{k1} \right) = a_{21}/u_{11} = -1/2 \cdot 2 = -1$

$i=3 \quad l_{31} = \frac{1}{u_{11}} \left(a_{31} - \sum_{k=1}^{0} l_{3k}\, u_{k1} \right) = a_{31}/u_{11} = 1/4 \cdot 2 = 1/2$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

SECONDA colonna $\underline{\underline{U_1}}$ / SECONDA colonna $\underline{\underline{L_1}}$ $(j=2)$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = 1$$

$$\ell_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right)$$

$i=1$ $$u_{12} = a_{12} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{1k} u_{k2} = a_{12} = -1/4$$

$i=2$ $$u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{2k} u_{k2} = a_{22} - \ell_{21} u_{12}$$
$$= 3/4 - (-1) \cdot (-1/4) = 1/2$$

$i=2$ $$\ell_{22} = 1$$

$i=3$ $$\ell_{32} = \frac{1}{u_{22}} \left(a_{32} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{3k} u_{k2} \right) = \frac{1}{u_{22}} \left(a_{32} - \ell_{31} \cdot u_{12} \right)$$
$$= 2 \cdot \left[1/4 - 1/2 \cdot (-1/4) \right]$$
$$= 3/4$$

$$\underline{\underline{L_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U_1}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & u_{13} \\ 0 & 1/2 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

TERZA colonna $\underline{\underline{U}}_1$ / TERZA colonna $\underline{\underline{L}}_1$ $\quad (j=3)$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = 1$$

$$\ell_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right)$$

$i=1 \qquad u_{13} = a_{13} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{1k} u_{k3} = a_{13} = 1/4$

$i=2 \qquad u_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{2k} u_{k3} = a_{23} - \ell_{21} \cdot u_{13}$

$$= 3/2 - (-1) \cdot 1/4 = 7/4$$

$i=3 \qquad u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} \ell_{3k} u_{k3} = a_{33} - (\ell_{31} u_{13} + \ell_{32} u_{23})$

$$= 7/16 - \left(1/2 \cdot 1/4 + 3/4 \, 7/4 \right)$$

$$= -1$$

$i=3 \qquad \ell_{33} = 1$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

VERIFICARE : $\underline{\underline{L}}_1 \underline{\underline{U}}_1 = \underline{\underline{A}}$

2) $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}_2 \underline{\underline{U}}_2$ con FATTORIZZAZIONE di GAUSS-CROUT

$\underline{\underline{L}}_2$: triangolare inferiore qualsiasi

$\underline{\underline{U}}_2$: triangolare superiore a <u>DIAGONALE UNITARIA</u>

calcolo alternativamente COLONNA di $\underline{\underline{L}}$

RIGA di $\underline{\underline{U}}$

$$\ell_{i1} = a_{i1} \qquad u_{1i} = \frac{a_{1i}}{\ell_{11}} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\left.\begin{aligned} &\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \qquad i = j, \dots, n \\ &u_{jj} = 1 \\ &u_{ji} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk} u_{ki} \right) \qquad i = j+1, \dots, n \end{aligned}\right\} \quad j = 2, \dots, n$$

<u>STRUTTURA MATRICI FATTORIZZAZIONE</u>

$\underline{\underline{A}}$

3×3

$$\underline{\underline{L}}_2 = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRIMA colonna $\underline{\underline{L_2}}$ / PRIMA riga $\underline{\underline{U_2}}$ $(j=1)$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$\ell_{i1} = a_{i1}$

$u_{1i} = a_{1i}/\ell_{11}$

$i=1 \quad \ell_{11} = a_{11} = 1/2$

$i=2 \quad \ell_{21} = a_{21} = -1/2$

$i=3 \quad \ell_{31} = a_{31} = 1/4$

$i=1 \quad u_{11} = a_{11}/\ell_{11} = 1$

$i=2 \quad u_{12} = a_{12}/\ell_{11} = -1/4 \cdot 2 = -1/2$

$i=3 \quad u_{13} = a_{13}/\ell_{11} = 1/4 \cdot 2 = 1/2$

$$\underline{\underline{L_2}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \ell_{22} & 0 \\ 1/4 & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U_2}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SECONDA colonna $\underline{\underline{L}}_2$ / SECONDA riga $\underline{\underline{U}}_2$ $\quad (j=2)$

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$u_{jj} = 1$$

$$u_{ji} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}\, u_{ki} \right)$$

$i=2 \qquad \ell_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{2k}\, u_{k2} = a_{22} - \ell_{21} \cdot u_{12}$

$$= 3/4 - (-1/2)\cdot(-1/2) = 1/2$$

$i=3 \qquad \ell_{32} = a_{32} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{3k} \cdot u_{k2} = a_{32} - \ell_{31} \cdot u_{12}$

$$= 1/4 - 1/4 \cdot (-1/2) = 3/8$$

$i=2 \qquad u_{22} = 1$

$i=3 \qquad u_{23} = \frac{1}{\ell_{22}} \left(a_{23} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{2k} \cdot u_{k3} \right) = \frac{1}{\ell_{22}} \left(a_{23} - \ell_{21} \cdot u_{13} \right)$

$$= 2 \cdot \left[3/2 - (-1/2) \cdot 1/2 \right]$$

$$= 7/2$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 3/8 & \ell_{33} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SECONDA colonna $\underline{\underline{L_2}}$ / SECONDA riga $\underline{\underline{U_2}}$ $(j=3)$

$$\ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$u_{jj} = 1$$

$$u_{ji} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}\, u_{ki} \right)$$

$i=3$

$$\ell_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} \ell_{3k} \cdot u_{k3}$$

$$= a_{33} - \left(\ell_{31} \cdot u_{13} + \ell_{32} \cdot u_{23} \right)$$

$$= 7/16 - \left(1/4 \cdot 1/2 + 3/8 \cdot 7/2 \right)$$

$$= -1$$

$i=3$ $\quad u_{33} = 1$

$$\underline{\underline{L_2}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 3/8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U_2}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VERIFICARE : $\underline{\underline{L_2}}\ \underline{\underline{U_2}} = \underline{\underline{A}}$

3) $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}_3 \, \underline{\underline{U}}_3$ con FORMULE di GAUSS-DOOLITTLE

$\underline{\underline{L}}_3$: triangolare inferiore a <u>DIAGONALE UNITARIA</u>

$\underline{\underline{U}}_3$: triangolare superiore qualsiasi

calcolo alternativamente RIGA di $\underline{\underline{U}}$

COLONNA di $\underline{\underline{L}}$

$$\left.\begin{aligned}
u_{ji} &= a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk} u_{ki} \qquad i = j, \dots, n \\
\ell_{jj} &= 1 \\
\ell_{ij} &= \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) \qquad i = j+1, \dots, n
\end{aligned}\right\} j = 1, \dots, n$$

<u>STRUTTURA MATRICI FATTORIZZAZIONE</u>

$\underline{\underline{A}}$

3×3

$$\underline{\underline{L}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

PRIMA riga $\underline{U}_3$ / PRIMA colonna $\underline{L}_3$ $(j=1)$

$$u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk} u_{ki}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = 1$$

$$\ell_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right)$$

$i=1$ $$u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{1k} u_{k1} = a_{11} = 1/2$$

$i=2$ $$u_{12} = a_{12} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{1k} u_{k2} = a_{12} = -1/4$$

$i=3$ $$u_{13} = a_{13} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{1k} u_{k3} = a_{13} = 1/4$$

$i=1$ $$\ell_{11} = 1$$

$i=2$ $$\ell_{21} = \frac{1}{u_{11}} \left(a_{21} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{2k} u_{k1} \right) = a_{21}/u_{11} = -1/2 \cdot 2 = -1$$

$i=3$ $$\ell_{31} = \frac{1}{u_{11}} \left(a_{31} - \sum_{k=1}^{0} \ell_{3k} u_{k1} \right) = a_{31}/u_{11} = 1/4 \cdot 2 = 1/2$$

$$\underline{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{U}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & u_{21} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

SECONDA riga $\underline{U}_3$ / SECONDA colonna $\underline{L}_3$ $\quad (j=2)$

$$u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}\, u_{ki} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = 1$$

$$\ell_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj} \right)$$

$i=2 \qquad u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{2k}\, u_{k2} = a_{22} - \ell_{21}\, u_{12}$

$$= 3/4 - (-1)\cdot(-1/4)$$
$$= 1/2$$

$i=3 \qquad u_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{2k}\, u_{k3} = a_{23} - \ell_{21}\cdot u_{13}$

$$= 3/2 - (-1)\cdot 1/4$$
$$= 7/4$$

$i=2 \qquad \ell_{22} = 1$

$i=3 \qquad \ell_{32} = \frac{1}{u_{22}}\left(a_{32} - \sum_{k=1}^{1} \ell_{3k}\, u_{k2}\right) = \frac{1}{u_{22}}\left(a_{32} - \ell_{31}\cdot u_{12}\right)$

$$= 2\cdot\left[1/4 - 1/2\cdot(-1/4)\right]$$
$$= 3/4$$

$$\underline{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{U}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

TERZA riga $\underline{\underline{U}}_3$ / TERZA colonna $\underline{\underline{L}}_3$ $(j=3)$

$$u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk} u_{ki}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 3/4 & 3/2 \\ 1/4 & 1/4 & 7/16 \end{pmatrix}$$

$$\ell_{jj} = 1$$

$$\ell_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right)$$

$i=3$

$$u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} \ell_{3k} u_{k3}$$

$$= a_{33} - (\ell_{31} \cdot u_{13} + \ell_{32} \cdot u_{23})$$

$$= 7/16 - \left(1/2 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 7/4\right)$$

$$= -1$$

$i=3$ $\quad \ell_{33} = 1$

$$\underline{\underline{L}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

VERIFICARE : $\underline{\underline{L}}_3 = \underline{\underline{L}}_1$ e $\underline{\underline{U}}_3 = \underline{\underline{U}}_1$

Esercizio 4.10
Sia dato il seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 49 & -28 & 7 \\ -28 & 52 & -22 \\ 7 & -22 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -12 \\ 147 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando l'aritmetica esatta,

1. si dica (senza fare alcun calcolo) perchè il metodo di Gauss-Seidel, applicato al medesimo sistema ha convergenza assicurata;

1) Perchè Gauss-Seidel ha convergenza assicurata? (senza fare calcoli)

$\rightarrow$ si vede che $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 49 & -28 & 7 \\ -28 & 52 & -22 \\ 7 & -22 & 46 \end{pmatrix}$

MATRICE STRETTAMENTE DIAGONALE DOMINANTE sia per RIGHE che per COLONNE

<u>per RIGHE</u>

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots, n$$

$i=1$ (riga 1) $\quad |a_{11}| = 49 > |a_{12}| + |a_{13}| = 28 + 7 = 35$

$i=2$ (riga 2) $\quad |a_{22}| = 52 > |a_{21}| + |a_{23}| = 28 + 22 = 50$

$i=3$ (riga 3) $\quad |a_{33}| = 46 > |a_{31}| + |a_{32}| = 7 + 22 = 29$

$\underline{\underline{A}}$ STRETTAMENTE DIAGONALE DOMINANTE PER RIGHE

$\Rightarrow$ Gauss-Seidel (e Jacobi) converge

PER COLONNE

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 49 & -28 & 7 \\ -28 & 52 & -22 \\ 7 & -22 & 46 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ SIMMETRICA $\Rightarrow$ sicuramente è anche

STRETTAMENTE DIAGONALE DOMINANTE PER COLONNE

Esercizio 4.14 ✓

(Da svolgere in aritmetica esatta). Sia data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli la matrice di iterazione B_G del metodo iterativo di Gauss-Seidel.
2. Considerato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1,1,1)^T$ e fissato $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$, si trovino la prima e la seconda soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.
3. Si dimostri, calcolando il raggio spettrale di B_G, che il metodo iterativo converge.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Costruzione matrice $\underline{\underline{B}}_G = (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} \underline{\underline{F}}$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ 0 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 2 & 0 & \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ -2 & 3 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ a & 1/3 & \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{I}}$$

sfruttiamo definizione matrice inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ a & 1/3 & \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ -2 & 3 & \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(riga 2 × col. 1) $\quad \frac{1}{2}a - \frac{2}{3} = 0 \quad a = \frac{4}{3}$

(riga 3 × col 1) $\quad \frac{1}{2}b - 2c + 1 = 0 \quad b = 2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}$

(riga 3 × col 2) $\quad 3c - 1 = 0 \quad c = \frac{1}{3}$

$$(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 4/3 & 1/3 & \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}_a = (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 4/3 & 1/3 & \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) soluzioni approssimate $\underline{x}^{(1)}$ e $\underline{x}^{(2)}$ sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

con $\underline{b} = (1,1,1)^T$ e $\underline{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\underline{B}}_G\,\underline{x}_k + \underline{q}$$

$$\underline{q} = (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1}\,\underline{b}$$

$$(\underline{\underline{D}}-\underline{\underline{E}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 4/3 & 1/3 & \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 4/3 & 1/3 & \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_1 = \underline{\underline{B}}_G\,\underline{x}_0 + \underline{q} = \underline{q} = \left(2, 5/3, 2/3\right)^T$$

$\underline{x}_0$ vettore nullo

$$\underline{x}_2 = \underline{\underline{B}}_G\,\underline{x}_1 + \underline{q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7/3 \\ 16/9 \\ -5/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 31/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

3) Dimostrare che metodo iterativo converge calcolando $\rho(\underline{\underline{B_G}})$

Calcolo AUTOVALORI : $\det(\underline{\underline{B_G}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2/3-\lambda & 1 \\ 0 & -1/3 & -\lambda \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B_G}} - \lambda \underline{\underline{I}}}$$

$$\left|\begin{matrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2/3-\lambda & 1 \\ 0 & -1/3 & -\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 2/3-\lambda \\ 0 & -1/3 \end{matrix}$$

$$\det(\underline{\underline{B_G}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \lambda^2 (2/3 - \lambda) - 1/3\,\lambda$$

$$\det(\underline{\underline{B_G}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2 - 2/3\,\lambda + 1/3\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} \longrightarrow \quad \Delta = \frac{4}{9} - 4 \cdot 1/3 = -8/9$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2/3 \pm i\, 2\sqrt{2}/3}{2} = 1/3 \pm i\,\sqrt{2}/3$$

$$|\lambda_1| = 0$$

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1/3\sqrt{1+2} = \sqrt{3}/3$$

$$\rho(\underline{\underline{B_G}}) = \max_{1 \le i \le 3} |\lambda_i| = \sqrt{3}/3 < 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{CONVERGE}}$$