Lezione 5 (2023-04-28)

Integrazione numerica

Valutare $I = \int_a^b f(x)\, dx$

Approssimazione $I_s = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i)$

$A_i^{(n)}$: pesi, dipendono da numero e scelta dei nodi

$x_0, \dots, x_n$: nodi

Formule Newton-Cotes elementari

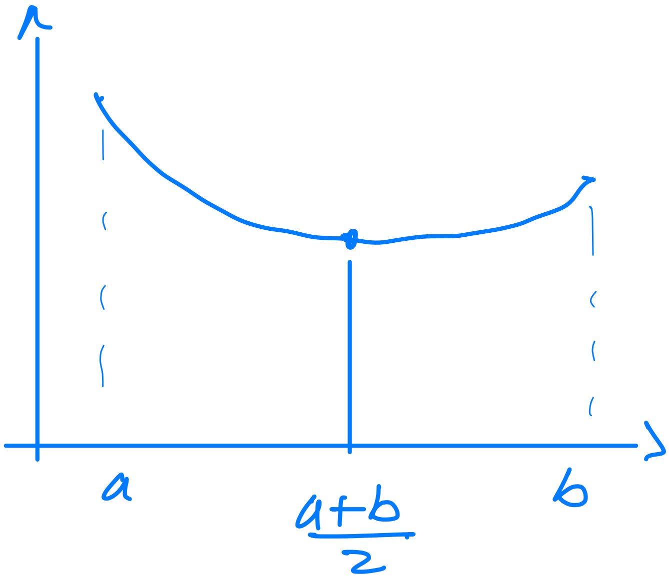
$(n+1)$ nodi equidistanti in $[a,b]$, ovvero

$$x_i = a + i \cdot h \qquad i = 0, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad : \text{passo}$$

$n = 0$ (Formula punto medio o rettangolo)

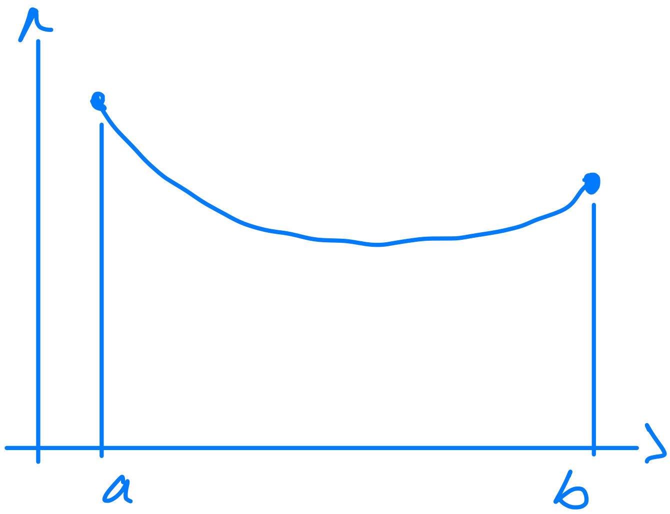
$$I_s = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



Grado precisione 1

$n = 1$ (Formula trapezio)

$$I_s = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$



Grado precisione 1

$h = b - a$

$$A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = \frac{b-a}{2}$$

$n = 2$ (Formula Simpson)

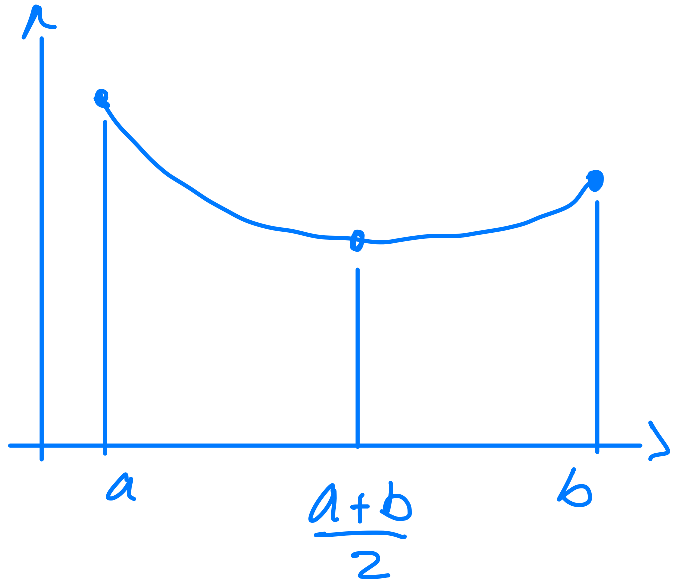
$$I_S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Grado precisione 3

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$A_0^{(2)} = A_2^{(2)} = \frac{b-a}{6}$$

$$A_1^{(2)} = \frac{4}{6}(b-a)$$



Grado di precisione

Formula quadratura grado precisione r se esatta quando funzione integranda è polinomio di grado al più r ed esiste almeno un polinomio di grado $(r+1)$ per quale $R_n(f) \neq 0$

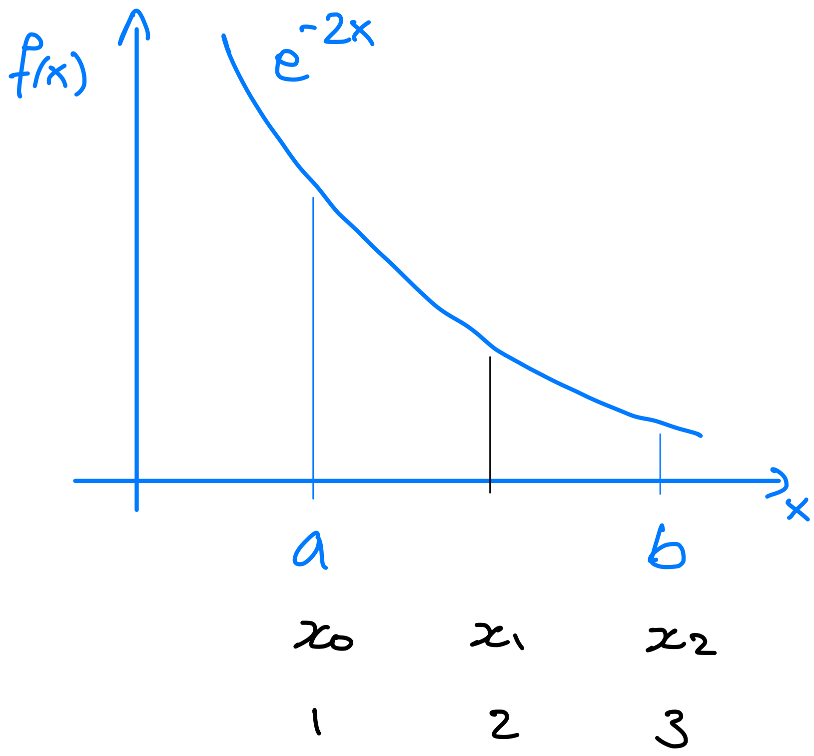
$R_n(f)$: errore di quadratura

Esercizio 7.17 ✓

Si consideri il seguente integrale definito

$$I = \int_1^3 e^{-2x}\,\mathrm{dx}.$$

1. Si calcoli, con il metodo di Cavalieri-Simpson, con $h = 1$, l'approssimazione I_S di I (facendo i calcoli in aritmetica esatta).
2. Si determini (in aritmetica esatta) il valore di I.
3. Si calcoli l'errore assoluto $|I - I_S|$ (facendo i calcoli con almeno 8-9 cifre decimali e scrivendo il risultato in formato esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice).



1) Approssimazione I_S Cavalieri-Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m/2-1}\left[f(x_{2i}) + 4\cdot f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]}_{I_S} + R(f)$$

$f(x) = e^{-2x}$ $\quad a = 1 \quad b = 3$

$h = \dfrac{b-a}{m} = 1 \quad \Rightarrow \quad m = 2$

$m = 2 \quad \Rightarrow \quad m/2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 0$

$x_k = a + k \cdot h \qquad k = 0, \dots, m$

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$

$\Rightarrow$ valutare $f(x) = e^{-2x}$ in x_k con $k = 0,1,2$

k	x_k	$f(x_k) = e^{-2x_k}$
0	1	$e^{-2} \simeq 0{,}135\,335\,283\,2$
1	2	$e^{-4} \simeq 0{,}018\,315\,638\,89$
2	3	$e^{-6} \simeq 0{,}002\,478\,752\,177$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{m/2-1} \left[f(x_{2i}) + 4 \cdot f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right] + R(f)$$

$f(x) = e^{-2x}$

i	$f(x_{2i}) + 4 \cdot f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})$
0	$f(1) + 4 \cdot f(2) + f(3) = e^{-2} + 4 \cdot e^{-4} + e^{-6}$

$h = 1 \qquad m = 2$

$$I_S = \frac{1}{3}\left(f(1) + 4 \cdot f(2) + f(3)\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-2} + 4 \cdot e^{-4} + e^{-6}\right)$$

$$\simeq 0{,}070\,358\,864$$

2) Valore di I

$$I = \int_1^3 e^{-2x}\,dx$$

$$\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$\int_1^3 e^{-2x}\,dx = \left| -\frac{1}{2}e^{-2x} \right|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-2} - e^{-6}\right) \simeq 0,066\,428\,265\,53$$

3) Errore assoluto

$$E_a = \left| I - I_s \right|$$

$$= \left| 0,066\,428\,265 - 0,070\,358\,864 \right|$$

$$\simeq 0,003\,930\,598$$

$$\simeq 0,393 \cdot 10^{-2}$$

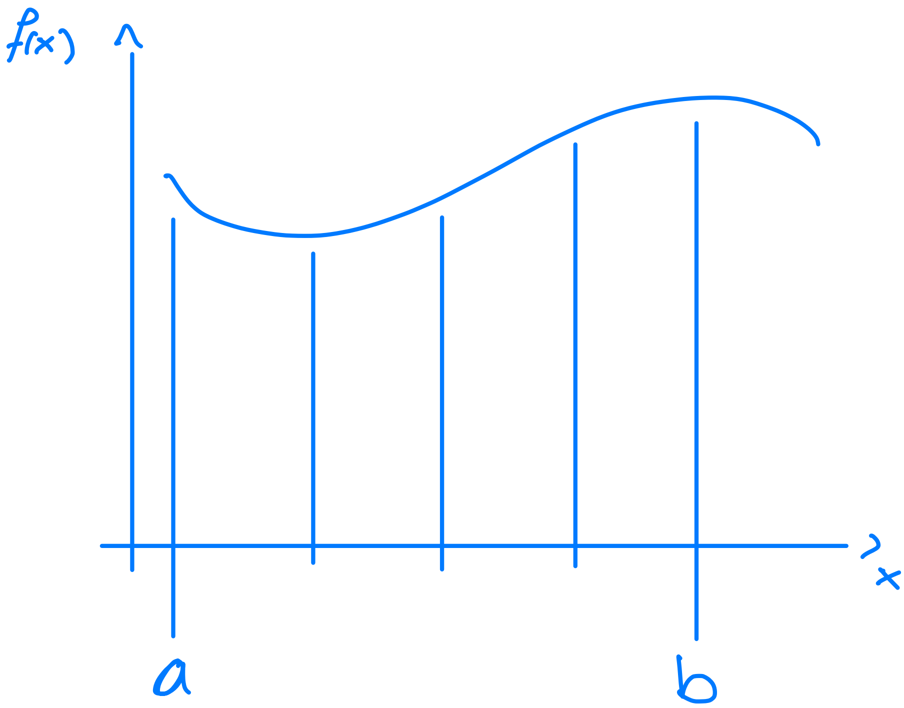
Esercizio 7.4 ✓

Si consideri il seguente integrale definito, per il quale la primitiva del corrispondente integrale indefinito è facilmente calcolabile,

$$I = \int_0^4 (e^x + 3x^2)\,\mathrm{dx}$$

1. Si calcoli, con il metodo di Cavalieri-Simpson, l'approssimazione I_S di I, suddividendo l'intervallo in $m = 4$ parti uguali (prima operando in aritmetica esatta e poi restituendo il risultato con almeno 8-9 cifre decimali).
2. Si determini (prima in aritmetica esatta e poi con almeno 8-9 cifre decimali) il valore di I.
3. Si calcoli l'errore relativo $|I - I_S|/|I|$ (facendo i calcoli con almeno 8-9 cifre decimali e scrivendo il risultato in formato esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice).

$f(x) = e^x + 3x^2$ $\quad a = 0 \quad b = 4$



$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 = b$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

1) Approssimazione I_S Cavalieri - Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m/2-1}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]}_{I_S} + R(f)$$

$f(x) = e^x + 3x^2 \qquad a=0 \qquad b=4$

$m = 4 \quad \Rightarrow \quad m/2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad i = 0, 1$

$h = \dfrac{b-a}{m} = 1$

i	x_{2i}	x_{2i+1}	x_{2i+2}
0	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
1	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$

$\Rightarrow$ valutare $f(x)$ in x_K con $K = 0, 1, \dots, 4$

$x_K = a + K \cdot h \qquad K = 0, \dots, 4$

K	x_K	$f(x_K) = e^{x_K} + 3(x_K)^2$
0	0	1
1	1	$e + 3 \simeq 5{,}718\,281\,828$
2	2	$e^2 + 12 \simeq 19{,}389\,056\,1$
3	3	$e^3 + 27 \simeq 47{,}085\,536\,92$
4	4	$e^4 + 48 \simeq 102{,}598\,15$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m/2-1}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right] + R(f)$$

$f(x) = e^x + 3x^2$ $\qquad m/2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad i = 0, 1$

i	$f(x_{2i}) + 4\cdot f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})$
0	$f(0) + 4\cdot f(1) + f(2) = 1 + 4(e+3) + e^2 + 12$ $= e^2 + 4e + 25$
1	$f(2) + 4\cdot f(3) + f(4) = e^2 + 12 + 4(e^3 + 27) + e^4 + 48$ $= e^4 + 4e^3 + e^2 + 168$
sum	$e^4 + 4e^3 + 2e^2 + 4e + 193$

$m = 4$

$h = \dfrac{b-a}{m} = 1$

$$I_S = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{1}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^4 + 4e^3 + 2e^2 + 4e + 193\right)$$

$$\simeq 117{,}863\ 845\ 746$$

2) Determinare I

$$I = \int_0^4 e^x + 3x^2 \, dx$$

$$\int e^x + 3x^2 \, dx = \int e^x \, dx + \int 3x^2 \, dx = e^x + x^3 + c$$

$$\int_0^4 e^x + 3x^2 \, dx = \left| e^x + x^3 \right|_0^4$$

$$= e^4 + 63 \simeq 117,598\ 150\ 033$$

3) Errore relativo

$$Er = \frac{|I - I_s|}{|I|} = \frac{|117,598\ 150\ 033 - 117,863\ 845\ 746|}{|117,598\ 150\ 033|}$$

$$\simeq 2,259\ 352\ 827 \cdot 10^{-3}$$

$$\simeq 0,226 \cdot 10^{-2}$$

ESERCIZIO

Ripetere pto 1 valutando I_S con

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ dispari}}}^{m-1} f(a+i\cdot h) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ pari}}}^{m-2} f(a+i\cdot h) + f(b) \right]$$

k	x_k	$f(x_k) = e^{x_k} + 3(x_k)^2$
0	0	1
1	1	$e+3$
2	2	e^2+12
3	3	e^3+27
4	4	e^4+48

$h = 1$

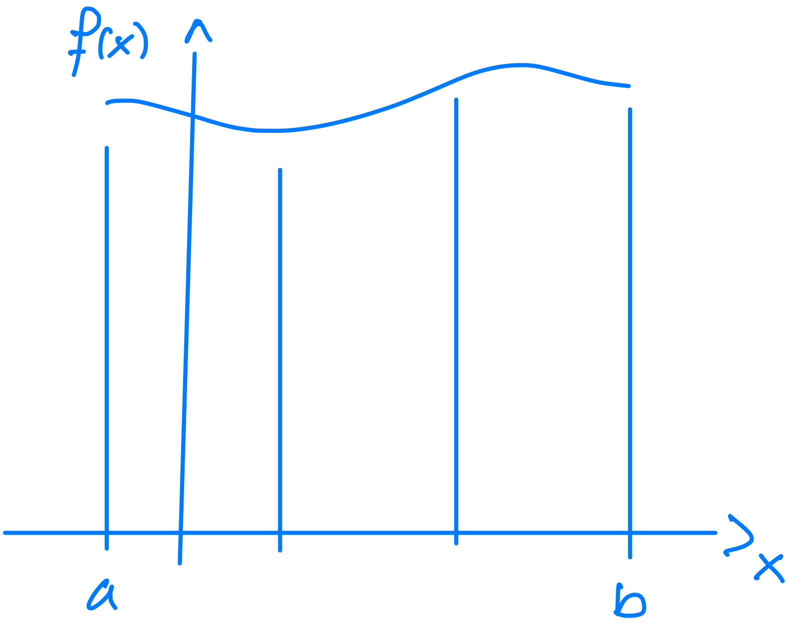
$$I_S = \frac{1}{3}\left[1 + 4\left(e+3+e^3+27\right) + 2\left(e^2+12\right) + e^4+48 \right]$$

Esercizio 7.11 ✓

Si consideri il seguente integrale definito

$$I = \int_{-1}^{2} \left(\frac{5}{2}x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 4x - 1 \right) \, dx.$$

1. Si calcolino (almeno 8-9 cifre decimali) con la formula dei Trapezi composta, i valori approssimati dell'integrale definito ottenuti suddividendo l'intervallo in $m_0 = 3$ ed in $m_1 = 6$ parti (per quest'ultima suddivisione si utilizzi il metodo semplificato che si avvale del risultato ottenuto per la suddivisione precedente).
2. Si calcoli l'integrale esatto.
3. Si calcolino gli errori assoluti (rispetto all'integrale esatto) delle due approssimazioni trovate (in formato esponenziale normalizzato con prima cifra significativa dopo il punto di radice e due cifre decimali).
4. Con le precedenti approssimazioni, si applichi il metodo di Romberg per ottenere l'approssimazione $T_1^{(0)}$.



1) Approssimazioni $T(h_0)$ e $T(h_1)$ con Trapezi composta

$$f(x) = \frac{5}{2}x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 4x - 1 \qquad a=-1 \qquad b=2$$

$$\underbrace{m_0 = 3 \qquad h_0 = \frac{b-a}{m_0} = 1}_{I_0} \qquad\qquad \underbrace{m_1 = 6 \qquad h_1 = \frac{b-a}{m_1} = \frac{1}{2} = \frac{h_0}{2}}_{I_1}$$

Intervalli uguali: $x_i = a + i \cdot h \quad i = 0, \dots, m$

$$I = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a + i \cdot h) + f(b)\right]}_{T(h)} + R(f)$$

Valutazione $T(h_0)$ $\;(h_0 = 1,\ m_0 = 3)$

$$T(h_0) = \frac{h_0}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{2} f(x_i) + f(b)\right]$$

i	x_i	$f(x_i) = 5/2\, x_i^4 - 15/2\, x_i^2 + 4x_i - 1$
0	$a = -1$	$\frac{5}{2} - \frac{15}{2} - 4 - 1 = -10$
1	0	-1
2	1	$\frac{5}{2} - \frac{15}{2} + 4 - 1 = -2$
3	$b = 2$	$\frac{5}{2} \cdot 16 - \frac{15}{2} \cdot 4 + 8 - 1 = 17$

$$T(h_0) = \frac{1}{2}\left[f(a) + 2 \cdot (f(x_1) + f(x_2)) + f(b)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left[-10 + 2(-1-2) + 17\right]}_{S_0} = 1/2 = 0{,}5$$

Valutazione $T(h_1)$ $(h_1 = 1/2\ ,\ m_1 = 6)$

$$T(h_1) = \frac{h_1}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{5} f(x_i) + f(b)\right]$$

i	x_i	$f(x_i) = 5/2\, x_i^4 - 15/2\, x_i^2 + 4x_i - 1$
0	$a = -1$	-10
1	$-1/2$	$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} - 1 = -\frac{151}{32}$
2	0	-1
3	$1/2$	$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{15}{2}\,\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} - 1 = -\frac{23}{32}$
4	1	-2
5	$3/2$	$\frac{5}{2}\cdot\frac{81}{16} - \frac{15}{2}\cdot\frac{9}{4} + 4\cdot\frac{3}{2} - 1 = \frac{25}{32}$
6	$b = 2$	17

$\longrightarrow$ viene richiesto METODO SEMPLIFICATO

$$T(h_i) = \frac{h_i}{2} S_i$$

$$S_i = f(a) + 2\sum_{j=1}^{m_i-1} f(a + j\cdot h_i) + f(b)$$

$$T(h_{i+1}) = \frac{h_{i+1}}{2} \cdot S_{i+1}$$

$$S_{i+1} = S_i + 2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^{m_{i+1}} f(a + j \cdot h_{i+1})$$

<u>Nel nostro caso</u>:

$$T(h_0) = \frac{h_0}{2} \cdot S_0$$

$$S_0 = f(a) + 2 \sum_{j=1}^{2} f(a + j \cdot h_0) + f(b)$$

$h_0 = 1$ $\quad S_0 = 1$ $\quad T(h_0) = 1/2$

$(m_0 = 3)$

$$S_1 = S_0 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^{m_1 = 6} f(a + j \cdot h_1)$$

$$= 1 + 2\left(\underbrace{-\frac{151}{32}}_{f(x_1)} \underbrace{-\frac{23}{32}}_{f(x_3)} + \underbrace{\frac{25}{32}}_{f(x_5)}\right) = -8{,}3125$$

$$T(h_1) = \frac{h_1}{2} \cdot S_1 = \frac{1}{4}(-8{,}3125) = -2{,}078125$$

2) Integrale esatto

$$I = \int_{-1}^{2} \left(\frac{5}{2} x^4 - \frac{15}{2} x^2 + 4x - 1 \right) dx$$

$$\int \left(\frac{5}{2} x^4 - \frac{15}{2} x^2 + 4x - 1 \right) dx = \frac{1}{2} x^5 - \frac{5}{2} x^3 + 2x^2 - x + c$$

$$\int_{-1}^{2} \left(\frac{5}{2} x^4 - \frac{15}{2} x^2 + 4x - 1 \right) dx = \left| \frac{1}{2} x^5 - \frac{5}{2} x^3 + 2x^2 - x \right|_{-1}^{2} =$$

$$= -3$$

3) Errori assoluti

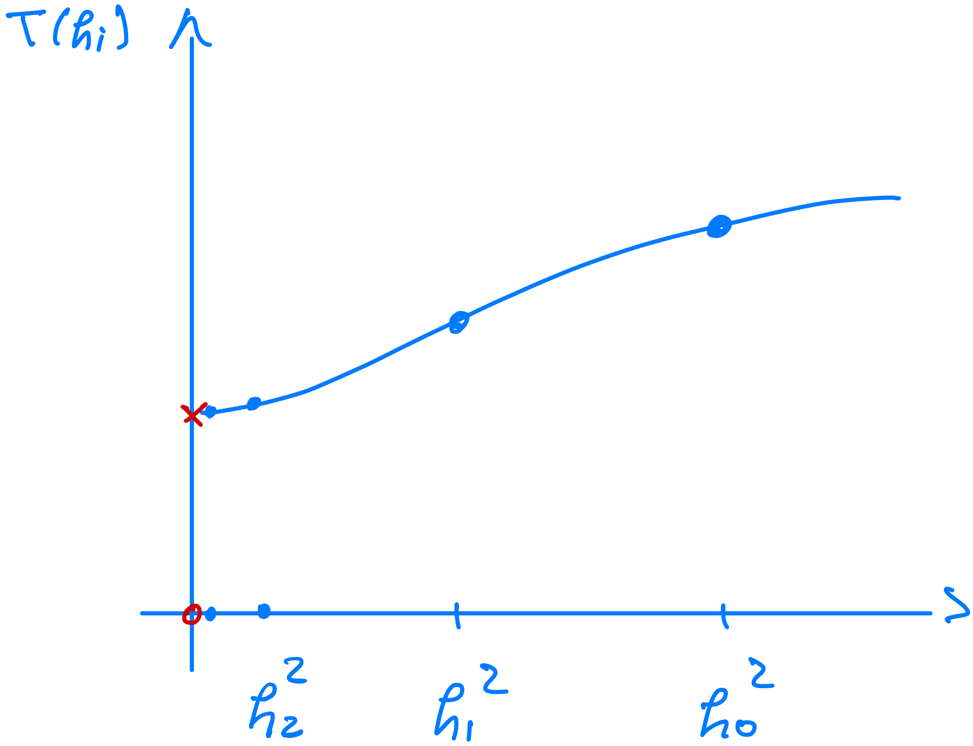
$$E_a^0 = |I - T(h_0)| = |-3 - 0{,}5| = 3{,}5$$

$$= 0{,}35 \cdot 10^1$$

$$E_a^1 = |I - T(h_1)| = |-3 + 2{,}078\,125|$$

$$= 0{,}921\,875 \simeq 0{,}92 \cdot 10^0$$

4) Metodo di Romberg per approssimazione $T_1^{(0)}$



Dovendo essere

$$\lim_{h \to 0} T(h) = T(0) = I$$

si estrapola polinomio interpolatore in 0 con Neville - Aitken

$$h_i^2 = \left(\frac{b-a}{m_i}\right)^2$$

i	h_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$
0	h_0	$T_0^{(0)}$	$T_1^{(0)}$
1	h_1	$T_0^{(1)}$	
$\vdots$			
n			

$T_1^{(0)} \longrightarrow \lim_{K \to \infty} T_K^{(i)} = I$

$$\lim_{i \to \infty} T_K^{(i)} = I$$

$$\lim_{i \to \infty} T_0^{(i)} = I$$

$\boxed{\text{sotto opportune ipotesi per } h_i \text{ e } f(x)}$

$$T_0^{(i)} = T(h_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$T_{k+1}^{(i)} = T_k^{(i+1)} - \frac{h_{i+k+1}^2}{h_{i+k+1}^2 - h_i^2} \left(T_k^{(i+1)} - T_k^{(i)} \right)$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

$$i = 0, \dots, n-k-1$$

notare scelta speciale : $h_1 = h_0/2$

i	h_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$
0	1	0,5	$T_0^{(1)} - \dfrac{h_1^2}{h_1^2 - h_0^2} \left(T_0^{(1)} - T_0^{(0)} \right)$
1	$1/2$	$-2{,}078125$	

$$T_1^{(0)} = -2{,}078125 - \frac{(1/2)^2}{(1/2)^2 - 1^2} \left(-2{,}078125 - 0{,}5 \right)$$

$$= -2{,}9375$$

$$E_a^R = |I - T_1^{(0)}| = |-3 + 2{,}9375| =$$

$$= 0{,}0625$$

$$\simeq 0{,}63 \cdot 10^{-1}$$

$$T_1^{(0)} = T_0^{(1)} - \frac{h_1^2}{h_1^2 - h_0^2} \left(T_0^{(1)} - T_0^{(0)} \right)$$

$$h_1 = h_0/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1^2}{h_1^2 - h_0^2} = \frac{h_0^2/4}{h_0^2/4 - h_0^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad T_1^{(0)} = T_0^{(1)} + \frac{1}{3}\left(T_0^{(1)} - T_0^{(0)} \right) = \frac{1}{3}\left(4T_0^{(1)} - T_0^{(0)} \right)$$

$$T_{k+1}^{(i)} = \frac{4^{k+1} \; T_k^{(i+1)} - T_k^{(i)}}{4^{k+1} - 1} \qquad \begin{array}{l} k = 0, \dots, n-1 \\ i = 0, \dots, n-k-1 \end{array}$$

$$T_1^{(0)} = \frac{4^1 \; T_0^{(1)} - T_0^{(0)}}{4^1 - 1} = -2{,}9375$$