Lezione 4 (2023-04-21)

Approssimazione

Esercizio 5.26 ✓

Siano dati i seguenti nodi e valori di una funzione

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2	1	0.5

1. Si calcolino, con lo schema di Neville Aitken, i polinomi $P_n(x)$, di grado al più $n = 1, 2$ che interpolano la funzione f, rispettivamente, nei primi due e tre nodi.
2. Valutare, utilizzando il polinomio interpolatore $P_2(x)$, un'approssimazione di $f(0.3)$.
3. Si dica se l'approssimazione del punto precedente è calcolata per interpolazione oppure per estrapolazione, giustificando la risposta.
4. Sapendo che la tabella rappresenta una tabulazione della funzione $f(x) = \dfrac{1}{5x}$, si calcoli l'errore commesso $|E_2(0.3)|$.
5. Si fornisca una maggiorazione di $|E_2(x)|$ valida $\forall x \in [0.1, 0.4]$ e si verifichi che l'errore calcolato nel punto precedente soddisfi tale maggiorazione.

1) Algoritmo Neville - Aitken

dati $(n+1)$ nodi x_i e $f(x_i)$.

Si consideri polinomio

$T_K^{(i)}(x) \in \mathbb{P}_K$ che interpola f in $x_i, \dots, x_{i+K}$

ovvero tale che

$T_K^{(i)}(x_j) = f(x_j)$ per $j = i, \dots, i+K$

Per definizione $P_n(x) \equiv T_n^{(0)}(x)$

(infatti $T_n^{(0)}(x) \in \mathbb{P}_n$ interpola f in $x_0, \dots, x_n$)

Costruzione $T_K^{(i)}$:

$$T_0^{(i)}(x) = f(x_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$T_{K+1}^{(i)}(x) = T_K^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+K+1} - x}{x_{i+K+1} - x_i}\left(T_K^{(i+1)}(x) - T_K^{(i)}(x)\right)$$

con $K = 0, \dots, n-1$

$i = 0, \dots, n-K-1$

ESEMPIO CON INDICE INFERIORE uguale a UNO
(GRADO del POLINOMIO al più UNO)

$i = 1$

$K+1 = 1 \qquad K = 0$

$i+K+1 = i+1$

$$T_1^{(i)}(x) = T_0^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\left(T_0^{(i+1)}(x) - T_0^{(i)}(x)\right)$$

$$= f(x_{i+1}) - \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)$$

$$T_1^{(i)}(x_i) = f(x_i) \qquad T_1^{(i)}(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

x_i	0,1	0,2	0,4
$f(x_i)$	2	1	0,5

$$T_{k+1}^{(i)}(x) = T_k^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_i}\left(T_k^{(i+1)}(x) - T_k^{(i)}(x)\right)$$

i	x_i	$T_0^{(i)}$ $f(x_i)$	$T_1^{(i)}$
0	0,1	2	$T_1^{(0)} = T_0^{(1)}(x) - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\left(T_0^{(1)}(x) - T_0^{(0)}(x)\right)$ $= 1 - \frac{0,2 - x}{0,2 - 0,1}(1 - 2)$ $= 3 - 10x$
1	0,2	1	$T_1^{(1)} = T_0^{(2)}(x) - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\left(T_0^{(2)}(x) - T_0^{(1)}(x)\right)$ $= 0,5 - \frac{0,4 - x}{0,4 - 0,2}(0,5 - 1)$ $= 3/2 - 5/2\, x$
2	0,4	0,5	

$i = 0$
$k+1 = 1$
$i+1 = 1$
$k = 0$
$i+k+1 = 1$

$i = 1$
$k+1 = 1$
$i+1 = 2$
$k = 0$
$i+k+1 = 2$

$$P_1(x) = 3 - 10x$$

Prova $\longrightarrow$ $P_1(x_0 = 0,1) =$

$P_1(x_1 = 0,2) =$

i	x_i	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$	$T_2^{(i)}$
0	0,1	2	$3-10x$	$T_2^{(0)}$
1	0,2	1	$\frac{1}{2}(3-5x)$	
2	0,4	0,5		

$$T_{k+1}^{(i)}(x) = T_k^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_i}\left(T_k^{(i+1)}(x) - T_k^{(i)}(x)\right)$$

$i = 0$
$k+1 = 2$
$i+1 = 1$
$k = 1$
$i+k+1 = 2$

$$T_2^{(0)} = \frac{1}{2}(3-5x) - \frac{0{,}4 - x}{0{,}4 - 0{,}1}\left[\frac{1}{2}(3-5x) - (3-10x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(50x^2 - 35x + 7) = P_2(x)$$

Prova:

$P_2(x_0 = 0{,}1) =$

$P_2(x_1 = 0{,}2) =$

$P_2(x_2 = 0{,}4) =$

2) Approssimazione $f(0,3)$

$$P_2(0,3) = \frac{1}{2}\left(50 \cdot \frac{9}{100} - 35 \cdot \frac{3}{10} + 7\right) = 0,5$$

3) INTERPOLAZIONE o ESTRAPOLAZIONE ?

perché $x = 0,3$ interno intervallo nodi

4) $f(x) = \frac{1}{5x}$ $\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(50x^2 - 35x + 7)$

$$E_2(0,3) = |f(0,3) - P_2(0,3)|$$

$$= \left|\frac{1}{5}\frac{10}{3} - \frac{1}{2}\right| = 1/6$$

5)

$$|E_n(x)| \leq |\omega_n(x)| \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

$n+1 = 3$ NODI $\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = f'''(x)$

DERIVATE

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{5x} & f'(x) = -\frac{1}{5}\frac{1}{x^2} \\ f''(x) = \frac{2}{5}\frac{1}{x^3} & f'''(x) = -\frac{6}{5}\frac{1}{x^4} \end{cases}$$

$$|E_2(x)| \leq |\omega_2(x)| \max_{x\in[0{,}1,\,0{,}4]} \frac{|f'''(x)|}{3!}$$

$$\max_{x\in[0{,}1,\,0{,}4]} |f'''(x)| = 12\,000 \quad (\text{per } f'''(0{,}1))$$

$$\omega_2 = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \left(x-\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{2}{10}\right)\left(x-\frac{4}{10}\right)$$

$$|E_2(x)| \leq \left|\left(x-\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)\right| \cdot \frac{12000}{6}$$

$$|E_2(x^*=0{,}3)| \leq \left|\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{10}-\frac{2}{10}\right)\left(\frac{3}{10}-\frac{4}{10}\right)\right| 2000$$

$$\leq 4$$

$$1/6 = 0{,}1\overline{6}$$

verificato!

$$1/6 \leq 4$$

Esercizio 5.19 ✓

(Da svolgere in aritmetica esatta). Si consideri la funzione

$$f(x) = \arccos x$$

definita nell'intervallo $[-1, 1]$. Si vuole calcolare il polinomio di interpolazione $P_2 \in \mathcal{P}_2$ nell'intervallo di esistenza, con l'interpolazione di Chebyshev.

1. Si scrivano i nodi di Chebyshev necessari per costruire il polinomio interpolante P_2.
2. Si costruisca la tabulazione delle coppie di valori $x_i, f(x_i)$, utilizzando i nodi di Chebyshev.
3. Si calcolino, con lo schema di Newton alle differenze divise, i coefficienti c_0, c_1 e c_2 del polinomio interpolatore P_2 dato nella forma di Newton.
4. Si calcoli il polinomio interpolatore P_2 e si verifichi che il polinomio calcolato interpola la funzione data nei nodi.

1) Intervallo $[-1,1]$

Polinomio Chebyshev (del primo tipo) $T_n(x)$ di grado n definito

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Polinomi Chebyshev soddisfano relazione di ricorrenza a tre termini. Calcolabili in modo ricorsivo come

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x$$

2) Zeri del polinomio $T_{n+1}(x)$ sono esattamente $n+1$ valori reali e distinti, appartenenti intervallo $[-1,1]$ e simmetrici rispetto a 0. Sono dati da

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{2(n+1)} \pi \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

3) Vale maggiorazione errore interpolazione

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \max_{[-1,1]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

1) IDENTIFICAZIONE dei NODI

$P_2 \Rightarrow n+1 = 3$ NODI NECESSARI per costruire P_2 univoco

$n = 2$

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{2(n+1)} \pi$$

$$x_0 = \cos \frac{1}{6}\pi = \sqrt{3}/2 \sim 0{,}87$$

$$x_1 = \cos \frac{3}{6}\pi = \cos \pi/2 = 0$$

$$x_2 = \cos \frac{5}{6}\pi = -\sqrt{3}/2 \sim -0{,}87$$

2) Tabulazione coppie di valori x_i, $f(x_i)$ usando nodi di Chebyshev

$f(x) = \arccos(x)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	$\cos \pi/6$	$\pi/6$
1	$\cos \pi/2$	$\pi/2$
2	$\cos 5/6\,\pi$	$5/6\,\pi$

Completare per esercizio
(si veda Lezione 3 - 2023-04-14 es 5.2 e 5.11)

3) Newton alle DIFFERENZE DIVISE

Polinomi Newton:

$$p_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$p_2(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)(x - x_1)$$

$$c_0 = f[x_0] ; \quad c_1 = f[x_0, x_1] ; \quad c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$c_n = f[x_0, x_1, \dots x_n]$$

ORDINE 0 $\quad f[x_i] = f(x_i)$

ORDINE 1 $\quad f[x_i, x_j] = \dfrac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$

ORDINE 2 $\quad f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
		$f(x_i)$	$\dfrac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$	....
0	$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$		
1	0	$\pi/2$		
2	$-\sqrt{3}/2$	$5/6\,\pi$		

$f[x_0, x_1, x_2] =$

$C_0 =$ $\qquad$ $C_1 =$ $\qquad$ $C_2 =$

4) Polinomio interpolatore

$$P_2(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$P_2(x) =$

Prova: <u>Valori $P_2(x)$ nei nodi</u> (x_0, x_1, x_2)

$$P_2\left(x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$P_2(x_1 = 0) =$$

$$P_2\left(x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	$\sqrt{3}/2$	$1/6$
1	0	$1/2$
2	$-\sqrt{3}/2$	$5/6$

Esercizio 6.7 ✓

Si deve calcolare, in aritmetica esatta, un'approssimazione ai minimi quadrati polinomiale di grado $n = 2$ (parabola) con i seguenti nodi, valori di una funzione e pesi

$$x = [0, 1/2, 1, 3/2, 2], \quad y = [0, 1/2, 1, 0, -1], \quad w = [1, 16, 1, 16, 1]$$

1. Si costruisca a partire dai valori dati il sistema delle equazioni normali.
2. Si calcolino i coefficienti a_0, a_1 ed a_2 e si scriva il polinomio ai minimi quadrati.

i	x_i	y_i	w_i
0	0	0	1
1	1/2	1/2	16
2	1	1	1
3	3/2	0	16
4	2	-1	1

$y_i = f(x_i)$ noti in $m+1$ pti

$m = 4$

$m + 1 = 5$

MIGLIORE APPROSSIMAZ. MINIMI QUADRATI:
(scelta classe $\mathcal{F}$ di funzioni)

$$\sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - g^*(x_i)\right)^2 w(x_i) = \min_{g \in \mathcal{F}} \sum_{i=0}^{m} \left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2 w(x_i)$$

$g^*(x)$ ESISTE UNICA se $\mathcal{F}$ sottospazio vettoriale generato da base di $(n+1)$ elementi (con $n \le m$) linearmente indipendenti

$g^*(x) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}_2$

base: $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$

$\forall\, g(x) \in \mathcal{S}$ si ha :

$$g(x) = a_0 \cdot g_0(x) + a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x)$$

Costruiamo matrice $\underline{\underline{A}}$ e vettore termini noti $\underline{b}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} \cdot g_0(x_0) & \sqrt{\omega_0} \cdot g_1(x_0) & \sqrt{\omega_0} \cdot g_2(x_0) \\ \sqrt{\omega_1} \cdot g_0(x_1) & \sqrt{\omega_1} \cdot g_1(x_1) & \sqrt{\omega_1} \cdot g_2(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\omega_m} \cdot g_0(x_m) & \sqrt{\omega_m} \cdot g_1(x_m) & \sqrt{\omega_m} \cdot g_2(x_m) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} & \sqrt{\omega_0} \cdot x_0 & \sqrt{\omega_0} \cdot x_0^2 \\ \sqrt{\omega_1} & \sqrt{\omega_1} \cdot x_1 & \sqrt{\omega_1} \cdot x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\omega_m} & \sqrt{\omega_m} \cdot x_m & \sqrt{\omega_n} \cdot x_m^2 \end{pmatrix} \qquad (m+1) \times 3$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} \cdot f(x_0) \\ \sqrt{\omega_1} \cdot f(x_1) \\ \vdots \\ \sqrt{\omega_n} \cdot f(x_m) \end{pmatrix} \qquad (m+1) \times 1$$

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ω_i	$\sqrt{\omega_i}$
0	0	0	1	1
1	1/2	1/2	16	4
2	1	1	1	1
3	3/2	0	16	4
4	2	-1	1	1

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_0} & \sqrt{w_0} \cdot x_0 & \sqrt{w_0} \cdot x_0^2 \\ \sqrt{w_1} & \sqrt{w_1} \cdot x_1 & \sqrt{w_1} \cdot x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{w_m} & \sqrt{w_m} \cdot x_m & \sqrt{w_n} \cdot x_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 \\ 4 & 4 \cdot 1/2 & 4 \cdot 1/4 \\ 1 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \\ 4 & 4 \cdot 3/2 & 4 \cdot 9/4 \\ 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_0} \cdot f(x_0) \\ \sqrt{w_1} \cdot f(x_1) \\ \vdots \\ \sqrt{w_n} \cdot f(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) Costruire il sistema delle <u>EQUAZIONI NORMALI</u>

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{a} = \underline{b} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{a} = \underline{\underline{A}}^T \underline{b}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad g^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 35 & 45 \\ 35 & 45 & 65 \\ 45 & 65 & 99 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{\underline{A}}^T\underline{b} \qquad \begin{pmatrix} 35 & 35 & 45 \\ 35 & 45 & 65 \\ 45 & 65 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

✓

2) Si calcolino a_0, a_1, a_2 e si scriva polinomio ai minimi quadrati

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad g^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$\rightarrow$ metodo di Cramer

$$\underbrace{\begin{pmatrix}35 & 35 & 45\\ 35 & 45 & 65\\ 45 & 65 & 99\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{K}}}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}8\\ 3\\ -1\end{pmatrix}}_{\underline{F}}$$

$$D = \det \underline{\underline{K}}$$

$$\begin{pmatrix}35 & 35 & 45\\ 35 & 45 & 65\\ 45 & 65 & 99\end{pmatrix}\begin{matrix}35 & 35\\ 35 & 45\\ 45 & 65\end{matrix}$$

Uso regola SARRUS

$$D = 35 \cdot 45 \cdot 99 + 35 \cdot 65 \cdot 45 + 45 \cdot 35 \cdot 65 +$$
$$- \left(45^3 + 65^2 \cdot 35 + 35^2 \cdot 99\right) = 400$$

$$D_0 = \det \underline{\underline{K_0}}$$

$$\underline{\underline{K_0}} = \begin{pmatrix}F_1 & K_{12} & K_{13}\\ F_2 & K_{22} & K_{23}\\ F_3 & K_{32} & K_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 35 & 45\\ 3 & 45 & 65\\ -1 & 65 & 99\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8 & 35 & 45\\ 3 & 45 & 65\\ -1 & 65 & 99\end{pmatrix}\begin{matrix}8 & 35\\ 3 & 45\\ -1 & 65\end{matrix}$$

$$D_0 = -30$$

$$D_1 = \det \underline{\underline{K_1}} = 700$$

$$\underline{\underline{K_1}} = \begin{pmatrix} K_{11} & F_1 & K_{13} \\ K_{21} & F_2 & K_{23} \\ K_{31} & F_3 & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 8 & 45 \\ 35 & 3 & 65 \\ 45 & -1 & 99 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \det \underline{\underline{K_2}} = -450$$

$$\underline{\underline{K_2}} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & F_1 \\ K_{12} & K_{22} & F_2 \\ K_{13} & K_{23} & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 35 & 8 \\ 35 & 45 & 3 \\ 45 & 65 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo coefficienti

$D = 400$ $\quad D_0 = -30$ $\quad D_1 = 700$ $\quad D_2 = -450$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = -3/40$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = 7/4$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D} = -9/8$$

$$g^*(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$= -9/8\, x^2 + 7/4\, x - 3/40$$

Esercizio 6.11

(Da svolgere in aritmetica esatta). Si considerino la seguente matrice ed il seguente termine noto, provenienti da dati sperimentali, e relativi al sistema sovradeterminato $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ da risolvere nel senso dei minimi quadrati

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli la retta di regressione lineare.
2. Si verifichi che la retta di regressione passa per il baricentro.
3. Si calcoli l'errore quadratico.

<u>Retta regressione lineare.</u>

$g^*(x) \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}_1$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} & \sqrt{\omega_0} \cdot x_0 \\ \sqrt{\omega_1} & \sqrt{\omega_1} \cdot x_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{\omega_m} & \sqrt{\omega_m} \cdot x_m \end{pmatrix} \qquad (m+1) \times 2$$

Base: $g_0(x) = 1$

$g_1(x) = x$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_0} \cdot f(x_0) \\ \sqrt{\omega_1} \cdot f(x_1) \\ \vdots \\ \sqrt{\omega_m} \cdot f(x_m) \end{pmatrix} \qquad (m+1) \times 1$$

<u>Conversione</u> : matrice $\underline{\underline{A}}$ e vettore $\underline{b}$ in ASCISSE x_i ORDINATE y_i e PESI ω_i

i	x_i	y_i $f(x_i)$	ω_i	$\sqrt{\omega_i}$
0	0	13/4	1	1
1	1/2	3/2	1	1
2	-1/2	3/2	1	1
3	2	-1/4	1	1

1) Retta REGRESSIONE LINEARE $\longrightarrow$ coeff. $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{b} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{\underline{A}}^T \underline{b}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/4 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Risolvo sistema $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{\underline{A}}^T \underline{b}$ con Cramer

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9/2 \end{pmatrix} \qquad D = \det \underline{\underline{K}} = 14$$

$$\underline{\underline{K}}_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1/2 & 9/2 \end{pmatrix} \qquad D_0 = \det \underline{\underline{K}}_0 = 28$$

$$\underline{\underline{K}}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad D_1 = \det \underline{\underline{K}}_1 = -14$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = 2$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = -1$$

$$g^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x = 2 - x$$

2+3) 2) verificare passaggio baricentro

$P_M = (x_M, y_M)$ baricentro

$$g^*(x_M) = a_0 + a_1 \cdot x_M = y_M \,?$$

$$x_M = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_i$$

$$y_M = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f(x_i)$$

3) Errore quadratico

$$E_q = \sum_{i=0}^{m} \underbrace{\left(f(x_i) - g^*(x_i)\right)^2}_{d_i^2} \cdot w_i$$

$$g^*(x) = a_0 + a_1 \cdot x = 2 - x$$

i	x_i	y_i	ω_i	$g^*(x_i)$ $2 - x_i$	d_i $y_i - g^*(x_i)$	$d_i^2 \cdot \omega_i$
0	0	$13/4$	1	2	$5/4$	$25/16$
1	$1/2$	$3/2$	1	$3/2$	0	0
2	$-1/2$	$3/2$	1	$5/2$	-1	1
3	2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/16$
sum	2	6				$21/8$

2) $x_{rt} = \frac{1}{m+1} \cdot 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y_{rt} = \frac{1}{m+1} \cdot 6 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$g^*(x_{rt}) = a_0 + a_1 \cdot x_{rt} = 2 - 1 \cdot \frac{1}{2} = 3/2 = y_{rt}$$

3) $$Eq = \sum_{i=0}^{m} \overbrace{(f(x_i) - g^*(x_i))^2 \cdot \omega_i}^{d_i^2 \cdot \omega_i}$$

$$= 21/8 = 2{,}625$$