Lezione 3 (2023-04-14)

Approssimazione (Interpolazione)

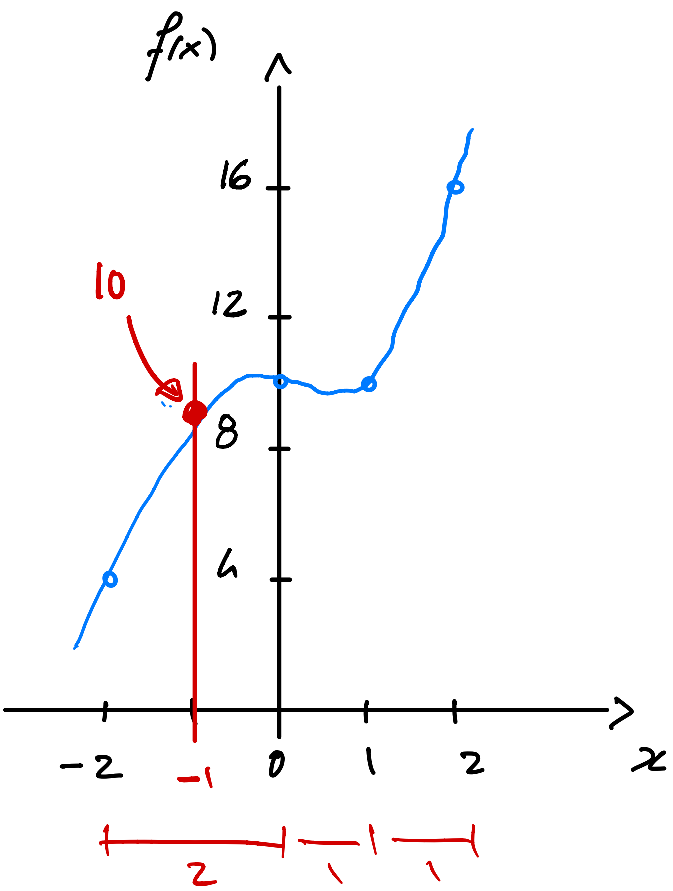
Esercizio 5.1 ✓
Siano dati i seguenti nodi ed i relativi valori di una certa funzione $f(x)$

x	-2	0	1	2
$f(x)$	4	10	10	16

1. Si calcoli, con la formula di Lagrange, il polinomio interpolatore.
2. Valutare, in aritmetica esatta, un'approssimazione di $f(-1)$ per interpolazione.
3. Se possibile, si ricalcoli il polinomio interpolatore, con la formula di Newton alle differenze finite in avanti.

Visualizzazione

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2	4
1	0	10
2	1	10
3	2	16



NODI DISTINTI $\quad n+1 = 4 \longrightarrow \exists$ unico $P_n \in \mathbb{P}_n$

$\Rightarrow P_3(x)$ esiste unico

1) Costruzione polinomio $P_3(x)$ con Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i^{(n)}(x)$$

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot L_i^{(3)}(x)$$

Valutazione polinomi caratteristici Lagrange

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\boxed{n = 3}$$

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	2

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = \frac{x-0}{-2-0}\,\frac{x-1}{-2-1}\,\frac{x-2}{-2-2} =$$

$$= -\frac{x^3-3x^2+2x}{24}$$

$$L_1^{(3)}(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{x-(-2)}{0-(-2)}\,\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-2}{0-2}$$

$$= \frac{x^3-x^2-4x+4}{4}$$

$$L_2^{(3)}(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,\frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{x^3-4x}{3}$$

$$L_3^{(3)}(x) = \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{x^3+x^2-2x}{8}$$

Polin. caratteristici Lagrange

$$L_0(x) = -\frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{4}(x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{8}(x^3 + x^2 - 2x)$$

x_i	$f(x_i)$
-2	4
0	10
1	10
2	16

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\, L_i^{(3)}(x)$$

$$= 4 \cdot L_0(x) + 10 \cdot L_1(x) + 10 \cdot L_2(x) + 16 \cdot L_3(x)$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 0$$

$$+ \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 10x + 10$$

$$- \frac{10}{3}x^3 + 0 + \frac{40}{3}x + 0$$

$$+ 2x^3 + 2x^2 - 4x + 0$$

$$= x^3 - x + 10$$

Prova $\quad P_3(x) = x^3 - x + 10$

$P_3(x_0) = P_3(-2) = -8-(-2)+10 = 4 \qquad f(x_0)$

$P_3(x_1) = P_3(0) = 10 \qquad f(x_1)$

$P_3(x_2) = P_3(1) = 10 \qquad f(x_2)$

$P_3(x_3) = P_3(2) = 8-2+10 = 16 \qquad f(x_3)$

2) $P_3(x) = x^3 - x + 10$

$f(-1) \triangleq P_3(x=-1) = (-1)^3 - (-1) + 10 = 10$

3) Se possibile, calcolare polinomio interpolatore con Newton differenze finite in avanti

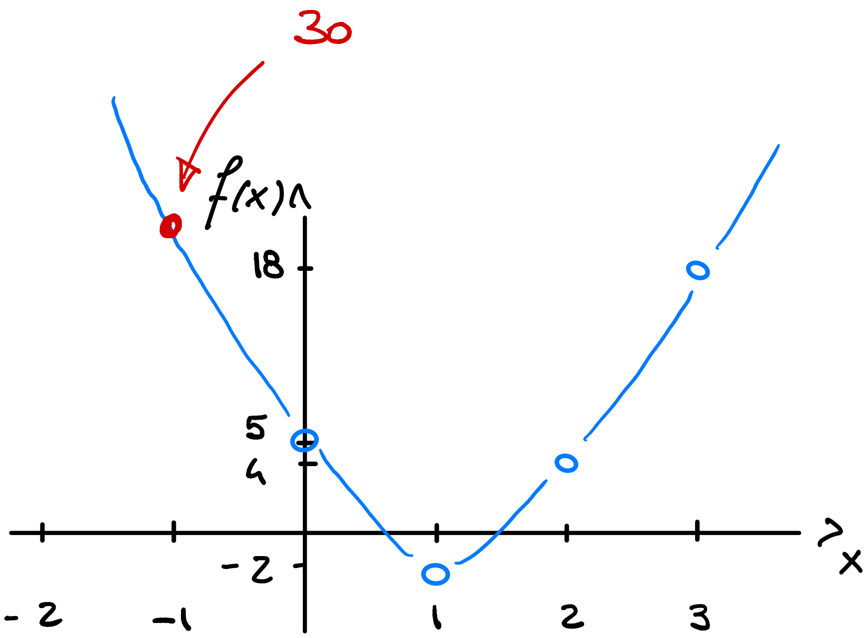
NON È POSSIBILE : nodi NON EQUIDISTANTI

Esercizio 5.2
Sia data la seguente tabella

$h = 1$

x	0	1	2	3
$f(x)$	5	-2	4	18

1. Si calcoli, con la formula di Newton alle differenze divise, il polinomio interpolatore.
2. Valutare, in aritmetica esatta, un'approssimazione di $f(1/2)$ per interpolazione.
3. Valutare, in aritmetica esatta, un'approssimazione di $f(-1)$ per estrapolazione.
4. Si ricalcoli il polinomio interpolatore, con la formula di Newton alle differenze finite in avanti.



NODI DISTINTI $\quad n+1 = 4 \longrightarrow P_3(x)$

$$P_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$P_3(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ c_3 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

1) Polin. interpolatore differenze divise

$c_0 \longrightarrow$ dipende da $f(x_0)$

$c_1 \longrightarrow$ " $f(x_0), f(x_1)$

$\vdots$

$c_n \longrightarrow$ " $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

notazione DIFFERENZE DIVISE di f

$$c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

DIFF. DIVISE di ORDINE $0, 1, \dots, n$ della funzione f

Ordine

0 $\quad f[x_i] = f(x_i)$

1 $$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$$

2 $$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$\vdots$

n $$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	5	-2	4	18

i	x_i	$f[x_i]$ $f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$ $\frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ $\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$
0	0	5	$\frac{5-(-2)}{0-1} = -7$	$\frac{-7-6}{0-2} = 13/2$
1	1	-2	$\frac{-2-4}{1-2} = 6$	$\frac{6-14}{1-3} = 4$
2	2	4	$\frac{4-18}{2-3} = 14$	
3	3	18		

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	0	5	-7	13/2	$\frac{13/2 - 4}{0-3} = -5/6$
1	1	-2	6	4	
2	2	4	14		
3	3	18			

$c_0 = f[x_0] = 5$

$c_1 = f[x_0, x_1] = -7$

$c_2 = f[x_0, x_1, x_2] = 13/2$

$c_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -5/6$

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	5	-2	4	18

$$P_3(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{3} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 5 + (-7)(x-0) + 13/2\,(x-0)(x-1) + -5/6\,(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= -5/6\,x^3 + 9x^2 - 91/6\,x + 5$$

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	5	-2	4	18

Prova

$P_3(x_0 = 0) = 5$

$P_3(x_1 = 1) = -5/6 + 9 - 91/6 + 5 = -2$

$P_3(x_2 = 2) = -5/6\ 8 + 9 \cdot 4 - 91/6 \cdot 2 + 5 = 4$

$P_3(x_3 = 3) = 18$

2) $p_3(x) = -\frac{5}{6}x^3 + 9x^2 - \frac{91}{6}x + 5$

$$f(1/2) \triangleq p_3(1/2) = -7/16$$

3) $f(-1) \triangleq p_3(-1) = 30$

4) NODI EQUIDISTANTI $\longrightarrow$ metodo applicabile

provare ... !

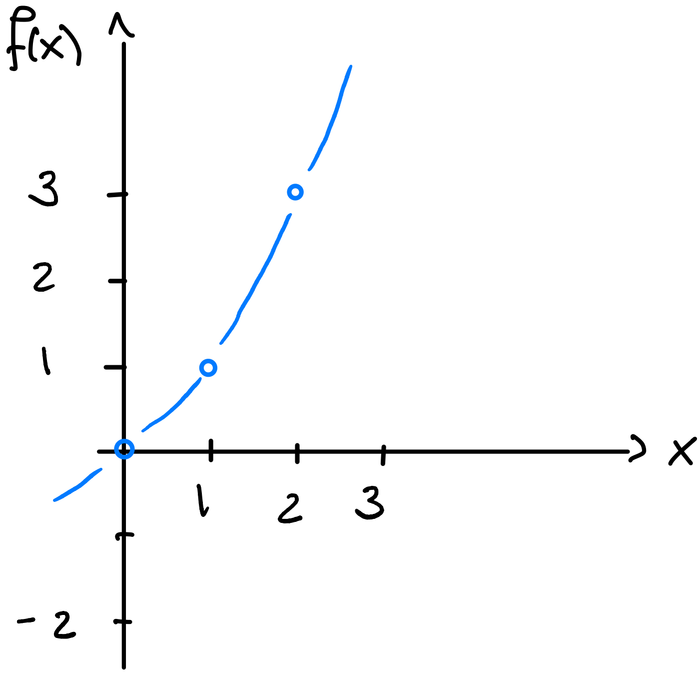
Esercizio 5.4 ✓

Siano dati i seguenti punti

$$(0,0), \qquad (1,1), \qquad (2,3).$$

1. Utilizzando l'aritmetica esatta, si calcoli il polinomio interpolatore, utilizzando la formula di Newton alle differenze finite in avanti.
2. Si dica se è possibile aggiungere il punto $(3,-2)$ e calcolare, utilizzando il precedente schema delle differenze finite in avanti, il polinomio che interpola la funzione nei quattro nodi.
3. Si ricalcoli il polinomio interpolatore con i tre punti iniziali assegnati, utilizzando la formula di Lagrange.

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	1	1
2	2	3



- NODI DISTINTI $\quad n+1 = 3 \quad \Rightarrow \quad p_2(x)$
- NODI EQUIDISTANTI (passo $h=1$)
- NODI DISPOSTI in ordine crescente

$$x_i = x_0 + i \cdot h \qquad i = 0, \dots, n$$

1)

$$P_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$n+1$ pti $\longrightarrow 3$ $\qquad P_2(x)$

$$P_2(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{2} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$c_0 = f(x_0)$$

h : passo

$$c_i = \frac{1}{i! \cdot h^i} \Delta^i f(x_0)$$

$$\boxed{x_i = x_0 + i \cdot h \qquad i = 0, \dots, n}$$

Δ : operatore delle differenze finite in avanti

Δ^k : potenza k-esima di Δ (k intero positivo o nullo)

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$$

$$= \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x) \quad \text{per } k = 1, 2, \dots$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	1	1
2	2	3

i	$\Delta^0 f(x_i)$ $f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$ $\Delta^0 f(x_{i+1}) - \Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$ $\Delta^1 f(x_{i+1}) - \Delta^1 f(x_i)$
0	0	$1-0=1$	$2-1=1$
1	1	$3-1=2$	
2	3		

$$C_0 = f(x_0) = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{1! \cdot h^1} \Delta^1 f(x_0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{2! \cdot h^2} \Delta^2 f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = 1/2$$

$$P_2 = C_0 + C_1 \cdot (x - x_0) + C_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$= 0 + 1 \cdot (x - 0) + 1/2 (x-0)(x-1)$$

$$= \frac{x}{2}(x+1)$$

Prova

$$P_2(x) = \frac{x}{2}(x+1)$$

$$P_2(x_0 = 0) = 0$$

$$P_2(x_1 = 1) = 1$$

$$P_2(x_2 = 2) = 3$$

2) Possiamo aggiungere x_3 se

$$x_3 = x_2 + h = 3$$

$$P_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$P_{n+1}(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\substack{P_2(x) \\ \text{(già noto)}}} + \underbrace{c_{n+1} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)}_{\text{da costruire!}}$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\cdot h^{n+1}} \Delta^{n+1} f(x_0)$$

$$C_3 = \frac{1}{3!\cdot h^3} \Delta^3 f(x_0)$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	1	1
2	2	3
3	3	-2

i	$\Delta^0 f(x_i)$ $f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$ $\Delta^0 f(x_{i+1}) - \Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$ $\Delta^1 f(x_{i+1}) - \Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$ $\Delta^2 f(x_{i+1}) - \Delta^2 f(x_i)$
0	0	1	1	$-7-1$ $= -8$
1	1	2	$-5-2=-7$	
2	3	$-2-3=-5$		
3	-2			

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{1}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0) \prod_{j=0}^{2}(x-x_j)$$

$$= \frac{x}{2}(x+1) - \frac{8}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= -\frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{6}x$$

Prova...!

3) $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i^{(n)}(x)$$

Per esercizio

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	1	1
2	2	3

$n+1$ nodi $\longrightarrow 3$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} =$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} =$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} =$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \cdot L_i^{(2)}(x)$$

Esercizio 5.11 ✓

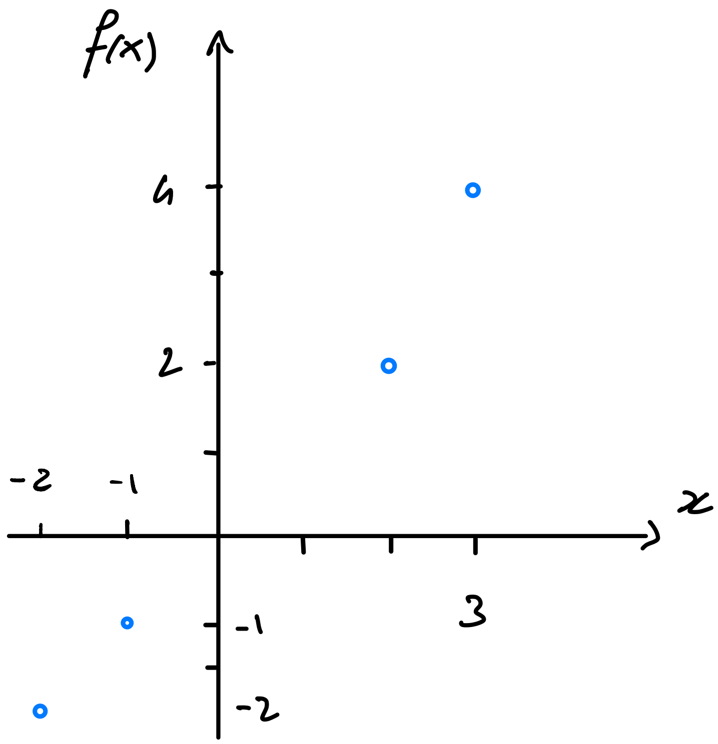
Si svolga in aritmetica esatta il seguente esercizio.
Siano date le seguenti coppie di valori $\{(x_i, f(x_i))\}, i = 0, \ldots, 3$

$$(-2, -2), \quad (-1, -1), \quad (2, 2), \quad (3, 4).$$

1. Si calcoli, con la formula di Newton alle differenze divise, il polinomio interpolatore $P_3(x) \in \mathcal{P}_3$ che interpola la funzione nei nodi dati.
2. Utilizzando il polinomio $P_3(x)$, si valuti un'approssimazione di $f(0)$ per interpolazione.
3. Si aggiunga un nuovo punto $(0, 1)$ e si calcoli, con le differenze divise, il polinomio $P_4(x) \in \mathcal{P}_4$ che interpola la funzione nei 5 nodi dati (senza effettuare tutti i calcoli dall'inizio).
4. Si calcoli l'errore $E_3(0) = f(0) - P_3(0)$.

1)

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2	-2
1	-1	-1
2	2	2
3	3	4



nodi

$n+1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \exists$ unico $P_3(x)$

$$p_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	2	3
$f(x_i)$	-2	-1	2	4

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$

i	x_i	$f[x_i]$ $f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$ $\frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ $\frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$
0	-2	-2		
1	-1	-1		
2	2	2		
3	3	4		

da completare per esercizio
(vedere risultati di seguito)

$$c_0 = f[x_0] = -2$$

$$c_1 = f[x_0, x_1] = 1$$

$$c_2 = f[x_0, x_1, x_2] = 0$$

$$c_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1/20$$

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	2	3
$f(x_i)$	-2	-1	2	4

$$p_3(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{3} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= \frac{x^3 + x^2 + 16x - 4}{20}$$

Prova

$x_0 = -2$ $\quad p_3(-2) =$

$x_1 = -1$ $\quad p_3(-1) =$

$x_2 = 2$ $\quad p_3(2) =$

$x_3 = 3$ $\quad p_3(3) =$

3) $f(0) \simeq P_3(0) =$

4) costruzione polinomio

$$P_n(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	-2	-2	1	0	$1/20$	$\frac{1/20 - 1/4}{-2-0} = 1/10$
1	-1	-1	1	$1/4$	$\frac{1/4 - 1/2}{-1-0} = 1/4$	
2	2	2	2	$\frac{2-1}{2-0} = 1/2$		
3	3	4	$\frac{4-1}{3-0} = 1$			
4	0	1				

$$P_4(x) = P_3(x) + c_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$P_3(x) = \frac{x^3 + x^2 + 16x - 4}{20}$$

$$c_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$P_4(x) = P_3(x) + \tfrac{1}{10}(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$= \frac{x^4}{10} - \frac{3}{20}x^3 - \frac{13}{20}x^2 + \frac{8}{5}x + 1$$

Prova

1
⋮

4) $E_3(0) = f(0) - P_3(0)$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ P_3(x) &= \frac{x^3 + x^2 + 16x - 4}{20} \end{aligned}\right\} \quad E_3(0) = 1 - \left(-\tfrac{1}{5}\right) = 6/5$$