Lezione 2 (2023-03-31)

Equazioni non lineari

RICHIAMI

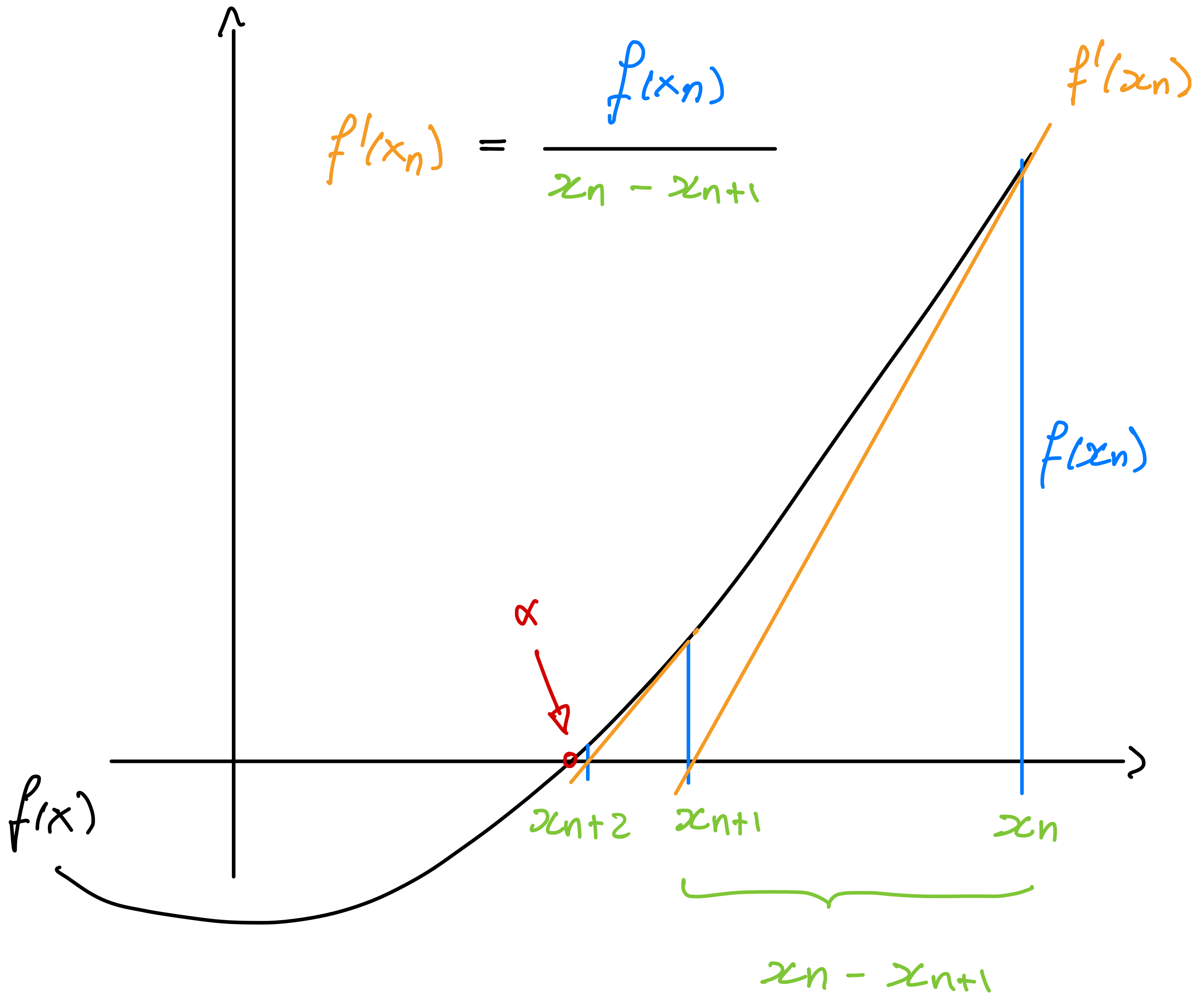
- Eq.ni non lineari, una sola incognita

- Determinazione
  - ZERI (RADICI) f.ne $f(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = 0$
  - PUNTI FISSI t.c. $x = g(x)$

- Metodi iterativi
  - α soluz. esatta di $f(x) = 0$
    ci accontentiamo di trovare $\hat{\alpha}$ (soluz. approssimata)
  - partendo da VALORE INIZIALE x_0
    si costruisce SUCCESSIONE $\{x_n\}$ (ITERATE)
    t.c.
    $$\lim_{n \to \infty} \{x_n\} = \alpha$$
  - costruzione SUCCESSIONE $\{x_n\}$ dipende da METODO di RISOLUZIONE
    - metodo di BISEZIONE
    - metodo di NEWTON
    - metodo SECANTE

Metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

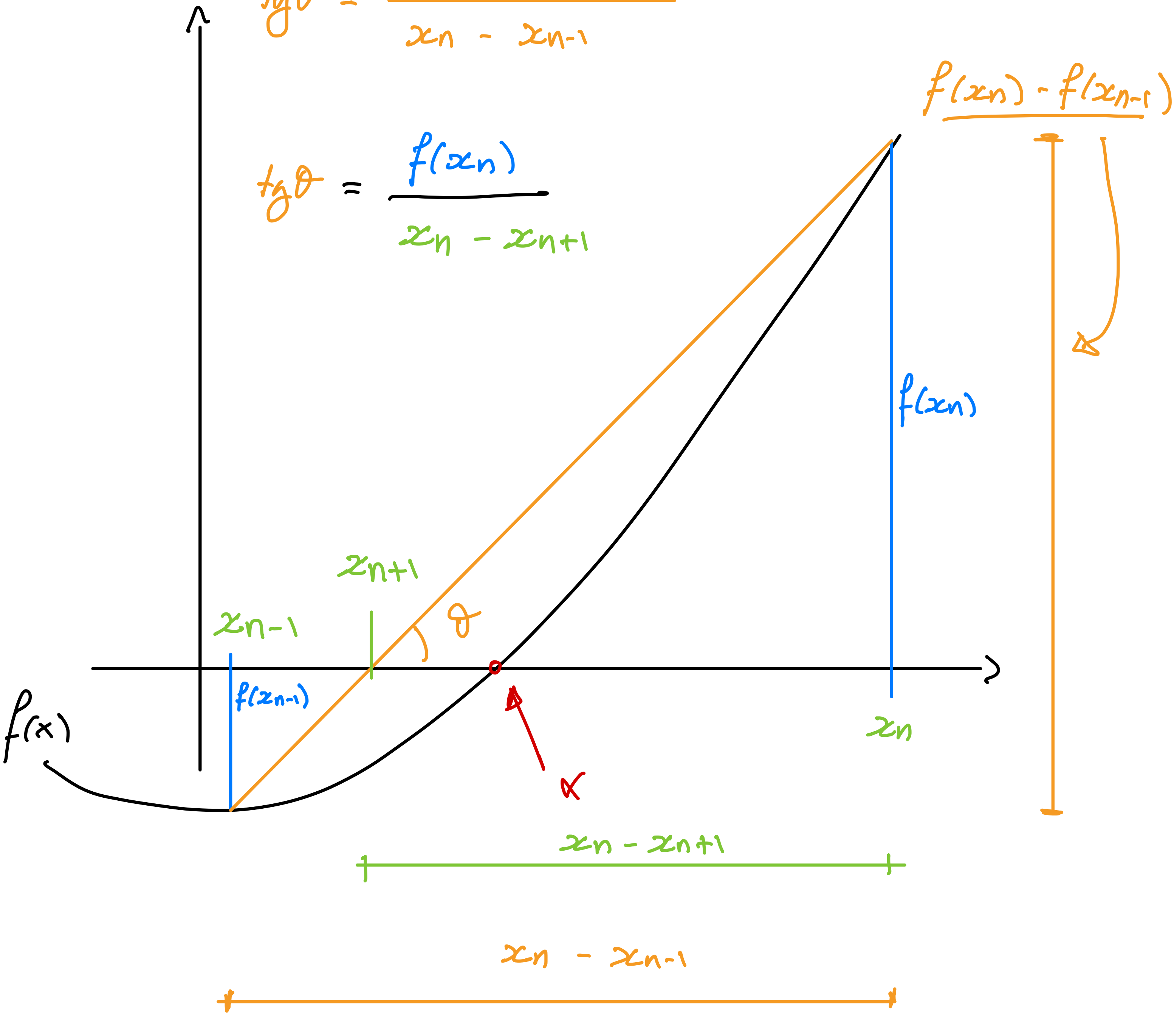


Metodo della secante

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{\underbrace{f(x_n) - f(x_{n-1})}_{\text{appross. derivata}}}$$

$$tg\theta = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$tg\theta = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$



Esercizio 2.13 ✓

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - e^{-x}.$$

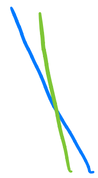
1. Si determinino graficamente le soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$.
2. Si dica quante soluzioni vi sono e si determinino gli intervalli, di ampiezza uguale a 0.5, che le contengono.
3. Considerata la soluzione maggiore, applicare il metodo di bisezione calcolando x_0, x_1 e x_2. Si sviluppi il metodo costruendo una tabella che, per $i = 0, \ldots, 2$, contiene gli estremi degli intervalli $[a_i, b_i]$, l'ampiezza $(b_i - a_i)$, l'iterata x_i ed il residuo $f(x_i)$.

4. Considerata come soluzione di riferimento $\alpha \simeq 1.358500920734946$, si determini l'errore relativo rispetto all'iterata x_2 con due cifre decimali dopo il punto di radice e formato esponenziale normalizzato.

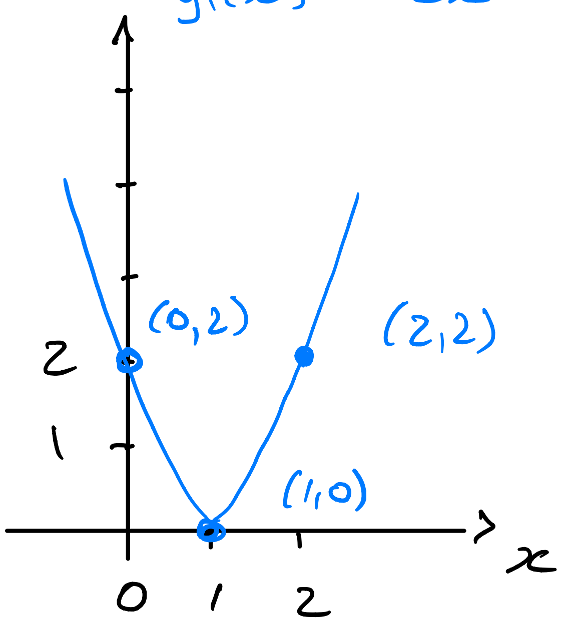
1) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 4x + 2 - e^{-x} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{2x^2 - 4x + 2}_{y_1(x)} = \underbrace{e^{-x}}_{y_2(x)}$$

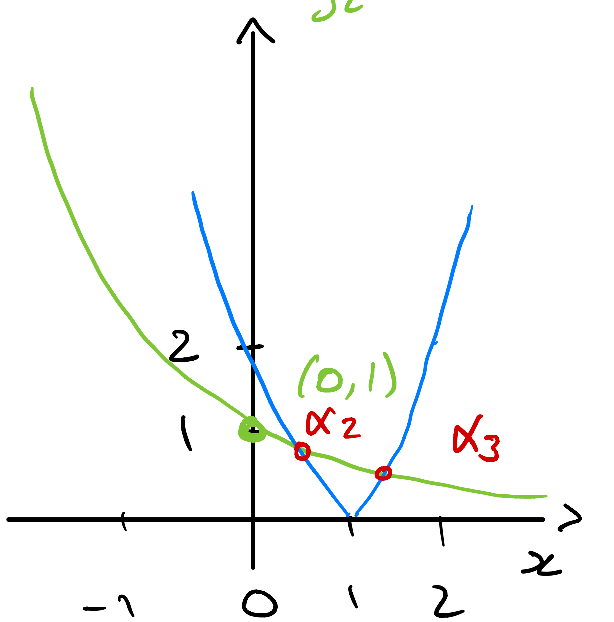
$y_1(x) = 2(x-1)^2$



$y_1(x) = 2x^2 - 4x + 2$

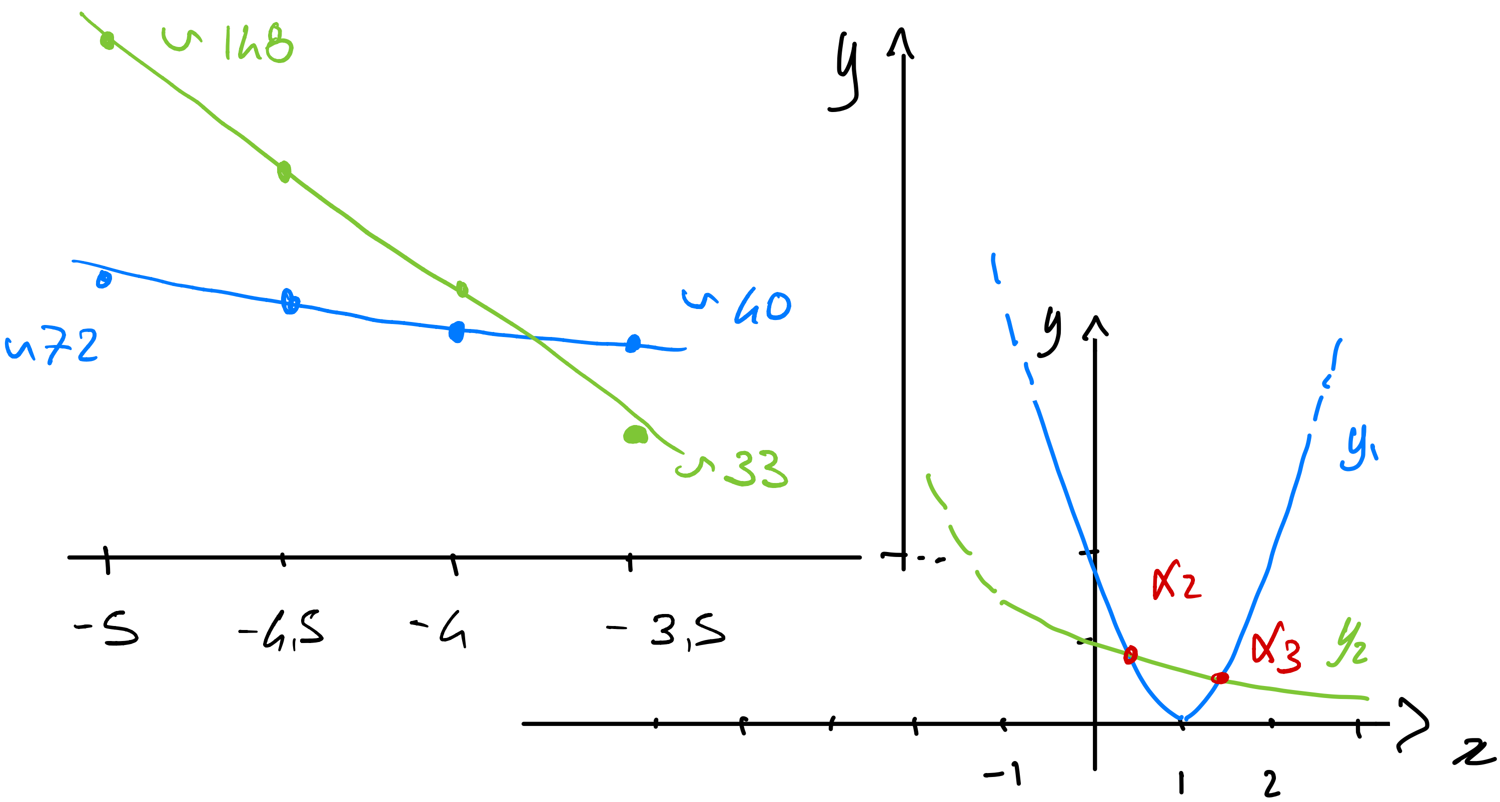


$y_2(x) = e^{-x}$



$$y_1 = 2x^2 - 4x + 2$$
$$y_2 = e^{-x}$$

$$y_1(x) = y_2(x)$$



x	$y_1 = 2x^2 - 4x + 2$		$y_2 = e^{-x}$
-5	72	<	148,413
-4,5	60,5	<	90,017
-4	50	<	54,598
-3,5	40,5	>	33,115
0	2	>	1
0,5	0,5	<	0,607
1	0	<	0,368
1,5	0,5	>	0,223
2	2	>	0,135

α_1 (between $x = -4$ and $x = -3,5$)

α_2 (between $x = 0$ and $x = 0,5$)

α_3 (between $x = 1$ and $x = 1,5$)

$f(1) \simeq -0,37$

$f(1,5) \simeq 0,28$

2) 3 soluzioni reali: $\alpha_1 \in (-4, -3{,}5)$

$\alpha_2 \in (0, 0{,}5)$

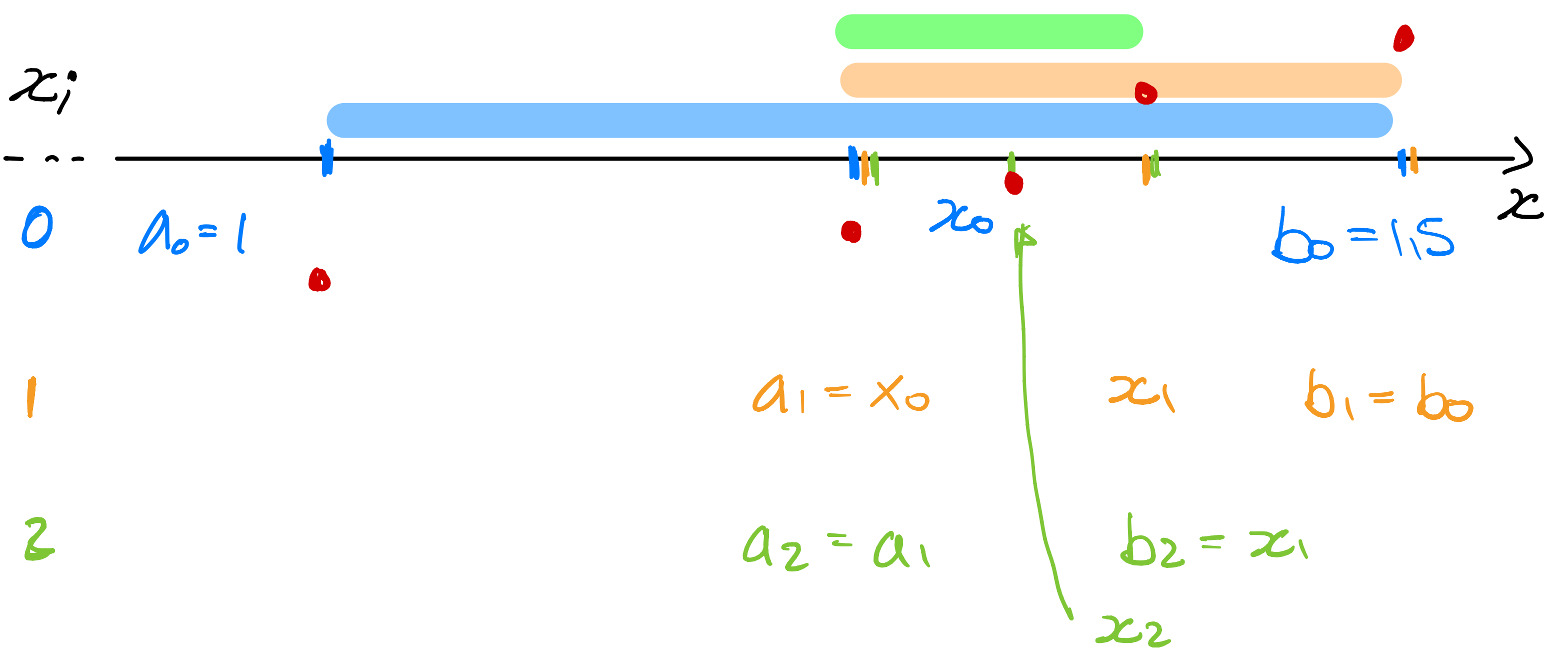
$\alpha_3 \in (1, 1{,}5)$

3) Soluzione maggiore $\Rightarrow$ $\alpha_3 \in (1, 1{,}5)$

Applicare metodo BISEZIONE $[a_0, b_0] = [1, 1{,}5]$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - e^{-x}$$

i	a_i	b_i	$b_i - a_i$	x_i	$f(x_i)$
0	1	1,5	0,5	1,25	− 0,161 504 796
1	1,25	1,5	0,25	1,375	+ 0,028 410 404
2	1,25	1,375	0,125	1,3125	− 0,073 833 848



4) $x_E = 1,358\ 500\ 920\ 734\ 946$

$x_2 = 1,3125$

$$E_r = \frac{|x_E - x_2|}{|x_E|} \simeq 0,033\ 861\ 53$$

$$\simeq 0,34 \times 10^{-1}$$

Esercizio 2.31 ✓

Si consideri la funzione

$\log = \log_e = \ln$

$$f(x) = 4x^2 - 1 + \log x.$$

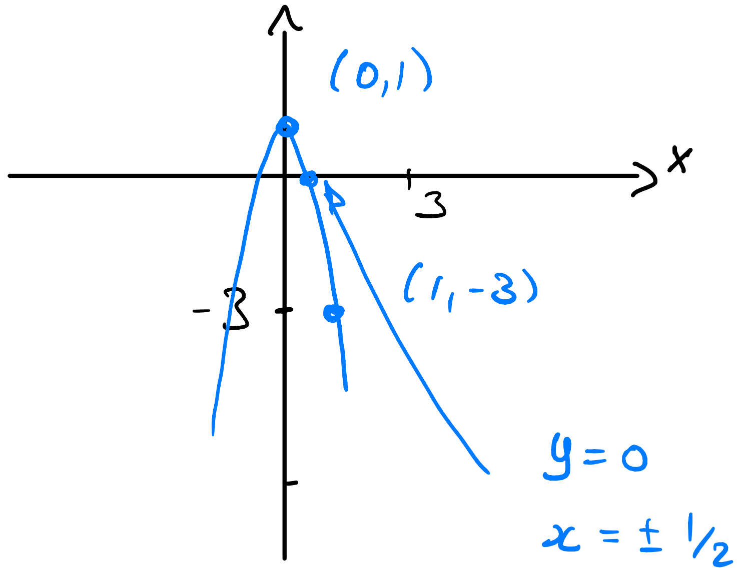
1. Si dica, determinandole graficamente, quante soluzioni reali ha l'equazione $f(x) = 0$
2. Si determinino gli intervalli, di ampiezza uguale a 0.5, che le contengono.
3. Si calcoli la derivata $f'(x)$.
4. Considerata la soluzione maggiore, applicare il metodo di Newton, prendendo come valore iniziale x_0 l'estremo destro dell'intervallo di ampiezza uguale a 0.5, che la contiene, e calcolare x_1, x_2 e x_3 (almeno 8-9 cifre decimali).
5. Si determini il residuo rispetto all'iterata x_3.
6. Si calcoli la prima stima dell'ordine di convergenza.
7. Sapendo che il valore ottenuto risulta una buona stima, si dica cosa se ne può dedurre.
8. Data l'equazione $f(x) = 0$, si determinino almeno 3 metodi di punto fisso da essa derivati.

1) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 1 + \log x = 0$

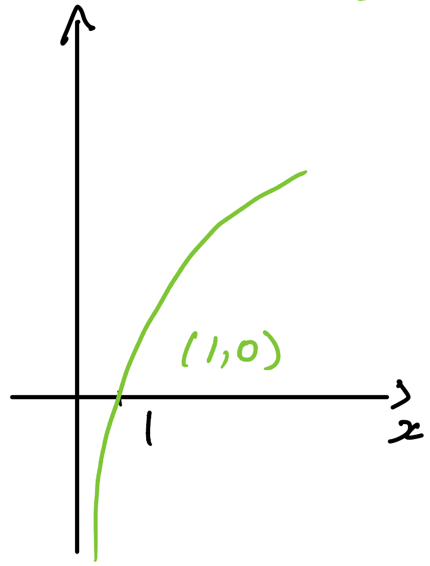
$\Leftrightarrow \quad \underbrace{1 - 4x^2}_{y_1(x)} = \underbrace{\log x}_{y_2(x)}$

$y_1(x) = (1+2x)(1-2x)$

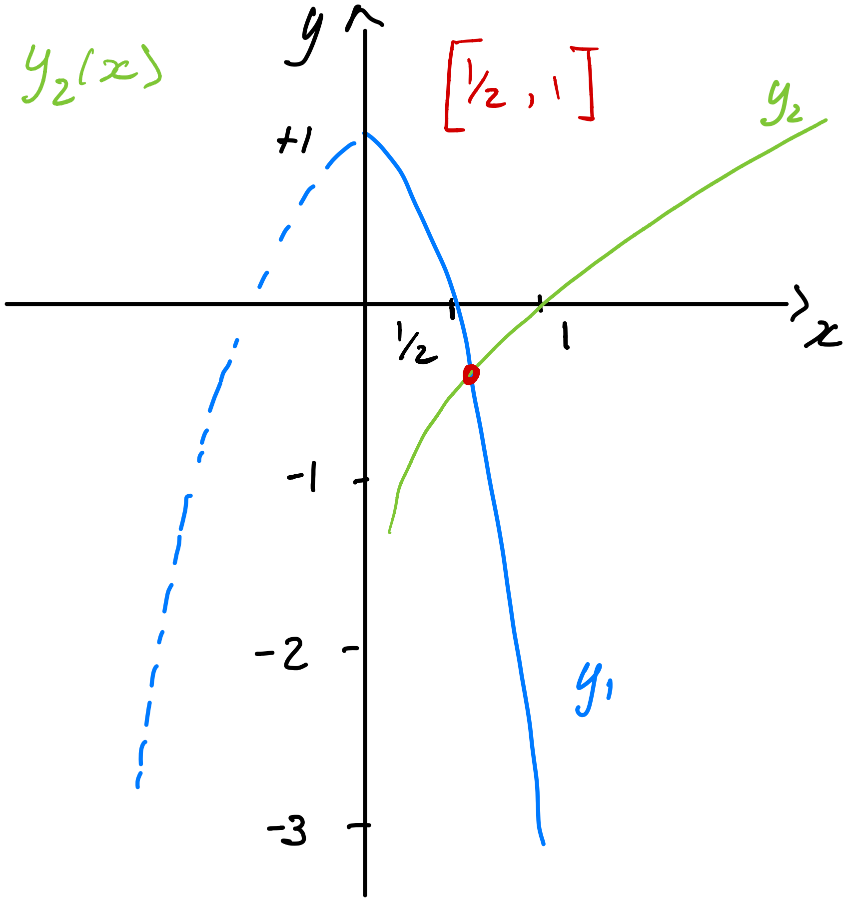
$y_1(x) = 1 - 4x^2$



$y_2(x) = \log x$



$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= 1-4x^2 \\ y_2(x) &= \log x \end{aligned}\right\} \quad y_1(x) = y_2(x)$$



x	y_1		y_2
0,5	0	>	−0,301
1	−3	<	0

2) $\alpha \in [1/2 , 1]$

3) $f(x) = 4x^2 - 1 + \log x$

$f'(x) = 8x + 1/x$

4) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x) = 4x^2 - 1 + \log x$

$f'(x) = 8x + 1/x$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$ $(= x_{n+1} - x_n)$
0	1	3	9	− 0,333 333 333
1	0,666 666 666	0,372 312 665	6,833 333 333	− 0,054 484 78
2	0,612 181 885	0,008 340 798	6,530 956 535	− 0,001 277 117
3	0,610 904 767	0,000 004 341		

5) Residuo iterata x_3

$$\Rightarrow \quad f(x_3) \simeq 0,000\,004\,341 \simeq 0,434 \times 10^{-5}$$

6)

$$p \simeq \frac{\log \frac{|x_3 - x_2|}{|x_2 - x_1|}}{\log \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 - x_0|}}$$

$$\simeq \frac{\log \frac{|0,610\,904\,767 - 0,612\,181\,885|}{|0,612\,181\,885 - 0,666\,666\,666|}}{\log \frac{|0,612\,181\,885 - 0,666\,666\,666|}{|0,666\,666\,666 - 1|}}$$

$$\simeq 2,072\,256\,363 \longrightarrow \boxed{p \simeq 2,072}$$

7) p stimato è ~ 2 (teorico atteso asintotico)

stiamo convergendo verso una radice semplice

8) $f(x) = 4x^2 - 1 + \log x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$

Possibili metodi pto fisso

$$f(x) = 0 \xrightarrow[\text{EQUIVALENTE}]{} x = g(x)$$

8.0) Soluzione banale

$$x = \underbrace{x + c \cdot f(x)}_{g(x) = x + c \cdot f(x)} \qquad c \neq 0$$

$$f(x) = 4x^2 - 1 + \log x \qquad f(x) = 0$$

8.1) $4x^2 = 1 - \log x$

$$x = \sqrt{\frac{1 - \log x}{4}}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \log x}$$

8.2)

$$x = \frac{1 - \log x}{4x}$$

$$g(x) = \frac{1 - \log x}{4x}$$

8.3) $\log x = 1 - 4x^2$

$$x = e^{(1-4x^2)}$$

$$g(x) = e^{(1-4x^2)}$$

Esercizio 2.18 ✓

Si consideri la funzione

$$f(x) = 4\cos(x/2) - 3.5 - x.$$

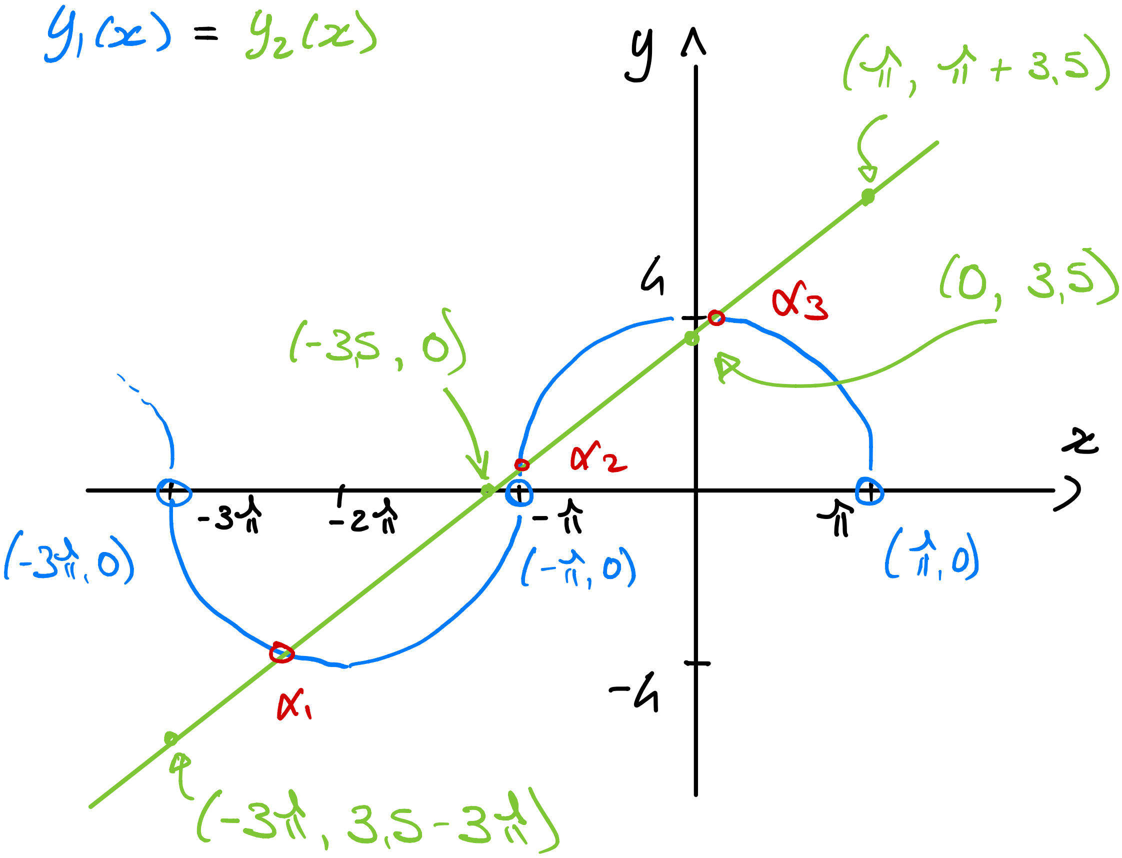
1. Sapendo che le uniche radici reali (l'argomento del cos è in radianti) sono contenute nell'intervallo $[-3\pi, \pi]$, si determinino graficamente le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.
2. Si determinino gli intervalli, di ampiezza uguale a 1, che le contengono.
3. Considerata la soluzione positiva, applicare il metodo della secante, con valori iniziali x_0 e x_1 coincidenti con gli estremi dello stesso intervallo, precedentemente determinato, che la contiene, e si calcoli la prima iterata x_2 (almeno 8-9 cifre decimali).
4. Si determini il residuo rispetto all'iterata x_2 (valore esponenziale normalizzato con 3-4 cifre decimali dopo il punto di radice).
5. Considerata come soluzione di riferimento $\alpha \simeq 0.41443051544321\,29$, si determini l'errore relativo rispetto all'iterata x_2 (valore esponenziale normalizzato con 3-4 cifre decimali dopo il punto di radice).

1) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3.5 - x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{4\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{y_1(x)} = \underbrace{x + 3{,}5}_{y_2(x)}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 4\cos\frac{x}{2} \\ y_2 &= x + 3{,}5 \end{aligned}\right\} \quad y_1(x) = y_2(x)$$

$x \in [-3\pi, \pi]$



$-3\pi \simeq -9{,}4$

$-2\pi \simeq -6{,}3$

$-\pi \simeq -3{,}1$

2) Intervalli ampiezza 1

x	y_1		y_2
-8	$-2,615$	$>$	$-4,5$
-7	$-3,746$	$<$	$-3,5$
-6	$-3,956$	$<$	$-2,5$
-4	$-1,665$	$<$	$-0,5$
-3	$0,283$	$<$	$0,5$
-2	$2,161$	$>$	$1,5$
0	4	$>$	$3,5$
1	$3,510$	$<$	$4,5$

I_1 I_2 I_3

$$y_1 = 4\cos\frac{x}{2}$$

$$y_2 = x + 3,5$$

$I_1 = [-8,-7]$ $\quad$ $I_2 = [-3,-2]$ $\quad$ $I_3 = [0,1]$

3) Considerata soluzione positiva $\Rightarrow$ $I_3 = [0,1]$

Applicare metodo secante.

Valori iniziali x_0, x_1 coincidenti con estremi intervallo

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

Calcolare prima iterata x_2

Metodo della SECANTE

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

calcolo x_2 :

$f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3.5 - x$

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	$f(x_n) - f(x_{n-1})$
0	0	0,5	/	/
1	1	−0,989 669 752	1	−1,489 669 752
2	0,335 644 862	0,108 158 482		

4) Residuo rispetto iterata x_2

$$f(x_2) \simeq 0,108\,158\,482 \simeq 0,1082 \times 10^{0}$$

5) Errore relativo iterata x_2

Soluzione di riferimento $\alpha \simeq 0,414\,430\,515\,443\,2129$

$$\varepsilon_r = \frac{|\alpha - x_2|}{|\alpha|} = \frac{|0,414\,430\,515 - 0,335\,644\,862|}{|0,414\,430\,515|}$$

$$\simeq 0,190\,105\,820$$

$$\simeq 0,1901 \times 10^0$$

Esercizio 2.22 ✓

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-3x} - x + 1.$$

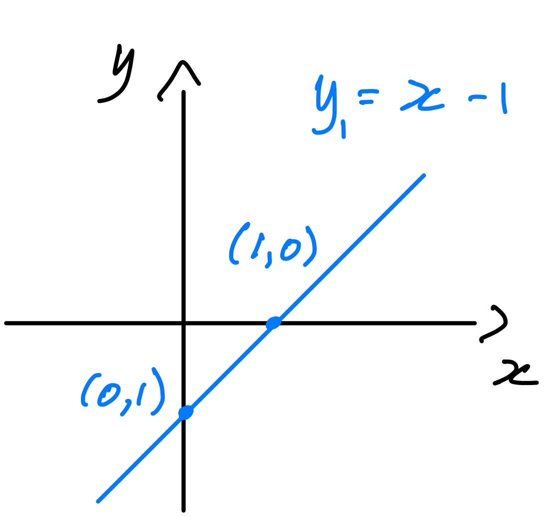
1. Si determini graficamente l'unica soluzione reale dell'equazione $f(x) = 0$.
2. Si determini un intervallo I, di ampiezza uguale a 0.5, che la contiene.
3. Si applichi poi il seguente metodo di punto fisso (che risolve tale equazione) e scegliendo come punto iniziale x_0 l'estremo sinistro dell'intervallo I, si determinino le successive due iterate x_1 ed x_2 (almeno 8-9 cifre decimali):

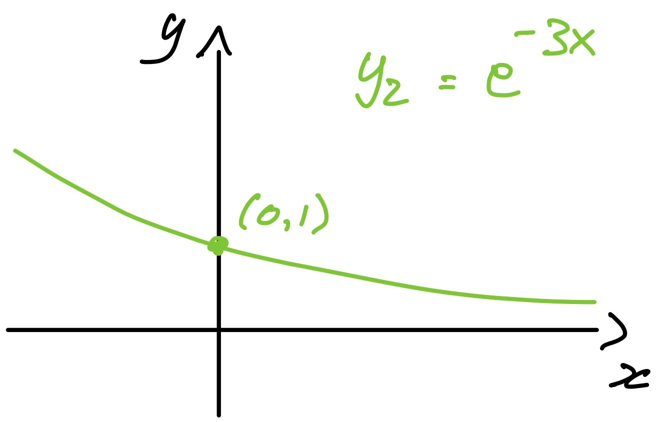
$$x_{n+1} = \frac{e^{-3x_n}(3x_n + 1) + 1}{3e^{-3x_n} + 1}.$$

4. Si fornisca il residuo rispetto all'ultima iterata ed il valore $|x_2 - x_1|$ (in formato esponenziale normalizzato con 2 cifre decimali dopo il punto di radice).
5. Supponendo di applicare il metodo di bisezione nello stesso intervallo I, si dica quante iterazioni sarebbero necessarie per ottenere la soluzione approssimata con un'accuratezza $\tau = 10^{-8}$.

1) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-3x} - x + 1 = 0$

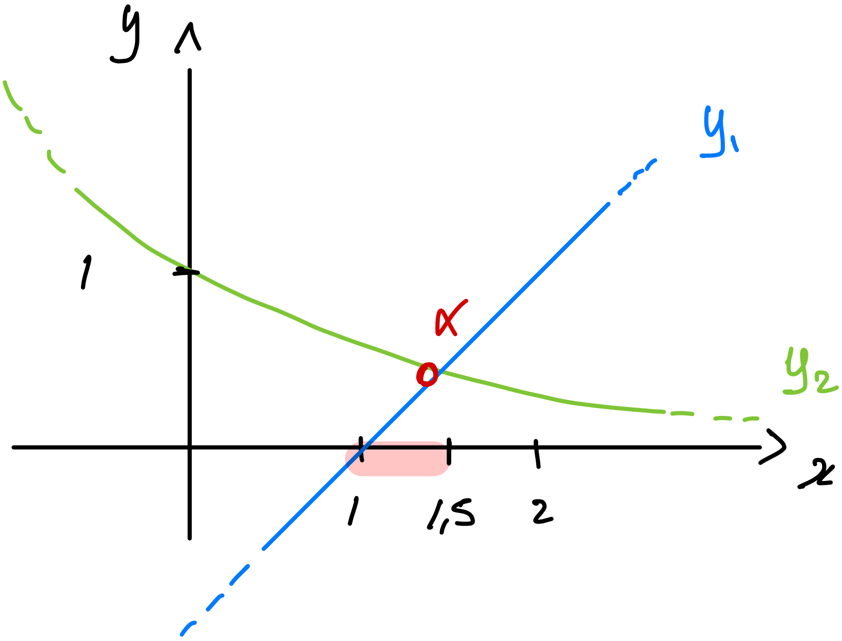
$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{x - 1}_{y_1(x)} = \underbrace{e^{-3x}}_{y_2(x)}$$





$y_1(x) = x - 1$

$y_2(x) = e^{-3x}$



x	y_1		y_2
1	0	<	0,049
1,5	0,5	>	0,011
2	1	>	0,002

2) intervallo I contenente soluz. reale di $f(x)$

$$I = [1 , 1{,}5]$$

3) metodo pto fisso ($x_{n+1} = g(x_n)$)

$$x_{n+1} = \frac{e^{-3x_n}(3x_n + 1) + 1}{3e^{-3x_n} + 1}$$

i	x_i	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	1	1,043 317 164	0,043 317 164
1	1,043 317 164	1,043 673 218	0,000 356 054
2	1,043 673 218		

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0,049 787 068
1	1,043 317 164	0,000 402 753
2	1,043 673 218	0,000 000 024

$f(x) = e^{-3x} - x + 1$

4) Residuo rispetto ultima iterata e valore $|x_2 - x_1|$

$$f(x_2) \simeq 0,24 \times 10^{-7}$$

$$|x_2 - x_1| \simeq 0,36 \times 10^{-3}$$

5) Metodo <u>BISEZIONE</u>

Quante iterazioni per garantire accuratezza $\tau = 10^{-8}$?

$$|E_n| \leq \tau$$

$|E_n| = |x_n - \alpha|$ ERRORE ASSOLUTO passo n

Stima ERRORE ASSOLUTO al passo n

$$|E_n| < \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{passo}} \underbrace{(b_0 - a_0)}_{\text{ampiezza intervallo iniziale}}$$

Accuratezza richiesta garantita se

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0) \le \tau$$

$$\frac{b_0 - a_0}{\tau} \le 2^{n+1} \Rightarrow n \ge \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\tau}\right) - 1$$

$$n \ge \frac{1}{\log_e 2} \log_e\left(\frac{b_0 - a_0}{\tau}\right) - 1$$

$$b_0 - a_0 = 0,5$$

$$\tau = 10^{-8}$$

$$n \ge \frac{1}{\log_e 2} \log_e(5 \cdot 10^7) - 1 \simeq 24,575$$

$$\boxed{n \ge 25}$$