Lezione 1 (2023-03-24)

Aritmetica del computer

RICHIAMI

- $a \in \mathbb{R} \longrightarrow fl(a) \in \mathbb{F}$

1) alcuni numeri reali **a** rappresentabili esattamente
tutti gli altri rappresentati con approssimazione a^*

2) estensione numeri rappresentabili

$$[-a_{max}, -a_{min}] \quad e \quad [a_{min}, a_{max}]$$

$|a| < a_{min} \longrightarrow$ underflow

$|a| > a_{max} \longrightarrow$ overflow

singola precisione : $a_{min} \simeq 10^{-38}$

$a_{max} \simeq 10^{38}$

- Errore di assegnazione

$$\varepsilon_r = \frac{|a - fl(a)|}{|a|} \leq eps$$

eps : precisione di macchina

singola precisione : $eps \simeq 1.2 \times 10^{-7}$

- Operazioni aritmetiche elementari

1) Operazioni macchina

$\otimes$, $\oslash$ } stabili rispetto a errori arrotondamento

$\oplus$, $\ominus$ } errori potenzialmente elevati

2) operazioni in $\mathbb{F}$
non godono di tutte proprietà
corrispondenti operazioni su $\mathbb{R}$

3) relazione anomala

se $\frac{|fl(y)|}{|fl(x)|} < eps \Rightarrow$ $fl(x) \oplus fl(y) = fl(x)$

$fl(x) \ominus fl(y) = fl(x)$

4) Errore di cancellazione

$$\overset{\oplus}{\varepsilon_r}(x,y) \leq eps + (1+eps)\left(\varepsilon_r(x)\frac{|x|}{|x+y|} + \varepsilon_r(y)\frac{|y|}{|x+y|}\right)$$

Regola per errore di cancellazione

x e y due numeri aventi stesso segno

m_x mantisse di x
m_y mantisse di y

siano prime r cifre coincidenti

→ La differenza tra questi due numeri ha solamente le prime $(t-r)$ cifre del risultato che possano considerarsi significative.

(t numero cifre significative rappresentabili in memoria)

Esercizio 1.30 ✓

Si supponga di lavorare in un'aritmetica floating point decimale con $t = 3$ cifre decimali riservate alla mantissa in memoria, 6 cifre decimali riservate alla mantissa negli accumulatori della ALU, tecnica di arrotondamento e normalizzazione $\pm 0 .a_1 \dots a_t \times 10^e$.

Dati i due numeri reali $a = 0.982$ e $b = 0.984$, si vogliono calcolare le seguenti espressioni (algebricamente equivalenti)

$$x = (a - b) \times 0.5 + b, \qquad y = (a + b) - (a + b) \times 0.5.$$

1. Si calcoli a mano il valore esatto.
2. Si dica quanto valgono le due espressioni x ed y.
3. Si dica quali *eventuali* errori si presentano nel calcolo della prima espressione.
4. Si dica quali *eventuali* errori si presentano nel calcolo della seconda espressione.
5. Si calcoli l'errore relativo per i due valori x ed y, e si fornisca il risultato in formato esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice.
6. Si dica se un'espressione è preferibile all'altra e perchè.
7. Si dica cosa viene calcolato, lavorando in aritmetica esatta, utilizzando le espressioni x ed y.

- $b = 10$
- mantissa memoria $t = 3$

  " ALU $t = 6$
- $a^* = \pm 0. a_1 \dots a_t \times 10^e$
- $a^* = \pm 0, a_1 \dots \bar{a}_t \times 10^e$

$$\bar{a}_t \begin{cases} a_t & \text{se} \quad a_{t+1} < 5 \\ a_t + 1 & \text{se} \quad a_{t+1} \geq 5 \end{cases}$$

1) $x_E = (a-b) \times 0{,}5 + b = 0{,}983$
$y_E = (a+b) + (a+b) \times 0{,}5 = 0{,}983$

$x_E = y_E = S_E = 0{,}983$

soluzione esatta

2.A) $x = (a-b) \times 0{,}5 + b$

$fl(a) = 0{,}982 \times 10^0$
$fl(b) = 0{,}984 \times 10^0$

	memoria	ALU	
$fl(a)$	$0{,}982 \times 10^0$	$0{,}982\,000 \cdot 10^0$	$-$
$fl(b)$	$0{,}984 \times 10^0$	$0{,}984\,000 \cdot 10^0$	
A $fl(a \ominus b)$	$-0{,}200 \times 10^{-2}$	$-0{,}002\,000 \cdot 10^0$	

$fl(a \ominus b)$	$-0{,}200 \times 10^{-2}$	$-0{,}200\,000 \times 10^{-2}$	$\times$
$fl(0{,}5)$	$0{,}500 \times 10^0$	$0{,}500\,000 \times 10^0$	
$fl((a \ominus b) \otimes 0{,}5)$	$-0{,}100 \times 10^{-2}$	$-0{,}100\,000 \times 10^{-2}$	

$fl((a \ominus b) \otimes 0{,}5)$	$-0{,}100 \times 10^{-2}$	$-0{,}001\,000 \times 10^0$	$+$
$fl(b)$	$0{,}984 \times 10^0$	$0{,}984\,000 \times 10^0$	
$fl(x)$	$0{,}983 \times 10^0$	$0{,}983\,000 \times 10^0$	

2.B) $y=(a+b)-(a+b)\times 0{,}5$

$fe(a) = 0{,}982 \times 10^0$

$fe(b) = 0{,}984 \times 10^0$

	memoria		ALU	
$fe(a)$	$0{,}982$	$\times 10^0$	$0{,}982\ 000 \times 10^0$	+
$fe(b)$	$0{,}984$	$\times 10^0$	$0{,}984\ 000 \times 10^0$	
A $fe(a\oplus b)$	$0{,}197$	$\times 10^1$	$1{,}966\ 000 \times 10^0$	

$a_t = 6$

$a_{t+1} = 6 > 5$ $\Rightarrow \bar{a}_t = 7$

$fe(a\oplus b)$	$0{,}197$	$\times 10^1$	$0{,}197\ 000 \times 10^1$	$\times$
$fe(0{,}5)$	$0{,}500$	$\times 10^0$	$0{,}500\ 000 \times 10^0$	
$fe((a\oplus b)\times 0{,}5)$	$0{,}985$	$\times 10^0$	$0{,}098\ 500 \times 10^1$	

$fe(a\oplus b)$	$0{,}197$	$\times 10^1$	$0{,}197\ 000 \times 10^1$	$-$
$fe((a\oplus b)\times 0{,}5)$	$0{,}985$	$\times 10^0$	$0{,}098\ 500 \times 10^1$	
$fe(y)$	$0{,}985$	$\times 10^0$	$0{,}098\ 500 \times 10^1$	

5) $S_E = 0{,}983 \times 10^0$

$$x = 0{,}983 \cdot 10^0$$

$$y = 0{,}985 \cdot 10^0$$

$$\varepsilon_r^x = \frac{|S_E - x|}{|S_E|} = \frac{|0{,}983 \cdot 10^0 - 0{,}983 \cdot 10^0|}{|0{,}983 \cdot 10^0|} = 0$$

$$\varepsilon_r^Y = \frac{|S_E - Y|}{|S_E|} = \frac{|0{,}983 \cdot 10^0 - 0{,}985 \cdot 10^0|}{|0{,}983 \cdot 10^0|}$$

$$\simeq 0{,}002\ 034\ 587$$

$$\simeq 0{,}203 \times 10^{-2}$$

Esercizio 1.24 ✓

Si supponga di lavorare in un'aritmetica floating point decimale con $t = 4$ cifre decimali riservate alla mantissa in memoria, 5 cifre decimali riservate alla mantissa negli accumulatori della ALU, tecnica di arrotondamento e normalizzazione $\pm 0.a_1 \ldots a_t \times 10^e$.

Dati i tre numeri reali $x = 1.403$, $y = 0.4112 \times 10^{-3}$ e $z = -0.4111 \times 10^{-3}$ si calcolino le seguenti espressioni (algebricamente equivalenti)

$$a = (x + y) + z, \qquad b = (y + z) + x.$$

1. Si calcoli a mano il valore esatto della somma.
2. Si dica quanto valgono le due espressioni a ed b.
3. Si dica quali eventuali errori si presentano nel calcolo della prima espressione.
4. Si dica quali eventuali errori si presentano nel calcolo della seconda espressione.
5. Si calcoli l'errore relativo, e si fornisca il risultato in formato esponenziale normalizzato con 3 cifre decimali dopo il punto di radice.
6. Si dica se un'espressione è preferibile all'altra.

- $b = 10$
- mantissa memoria $t = 4$

  " accumulatore $t = 5$
- $\pm 0, a_1 \ldots a_t \times 10^e$
- arrotondamento

$$a^* = \pm 0, a_1 \ldots \bar{a}_t \times 10^e$$

$$a_t = \begin{cases} a_t & \text{se } a_{t+1} < 5 \\ a_t + 1 & \text{se } a_{t+1} \geq 5 \end{cases}$$

1) $S_E = x + y + z = 0{,}140\ 300\ 01 \times 10^1$

2.A) $a = (x+y)+z$

$fl(x) = 0{,}1403 \times 10^1$
$fl(y) = 0{,}4112 \times 10^{-3}$
$fl(z) = -0{,}4111 \times 10^{-3}$

	memoria			accumulatore			
	$fl(x)$	$0{,}1403$	$\times 10^1$	$0{,}140$	30	$\times 10^1$	+
A	$fl(y)$	$0{,}4112$	$\times 10^{-3}$	$0{,}000$	04	$\times 10^1$	
B	$fl(x \oplus y)$	$0{,}1403$	$\times 10^1$	$0{,}140$	$3 \mid 4$	$\times 10^1$	

	memoria			accumulatore			
	$fl(x \oplus y)$	$0{,}1403$	$\times 10^1$	$0{,}140$	30	$\times 10^1$	+
C	$fl(z)$	$-0{,}4111$	$\times 10^{-3}$	$-\ 0{,}000$	04	$\times 10^1$	
D	$fl(a)$	$0{,}1403$	$\times 10^1$	$0{,}140$	$2 \mid 6$	$\times 10^1$	

2.B) $b = (y+z) + x$

$fl(x) = 0,1403 \times 10^{1}$
$fl(y) = 0,4112 \times 10^{-3}$
$fl(z) = -0,4111 \times 10^{-3}$

	memoria	accumulatore	
$fl(y)$	$0,4112 \times 10^{-3}$	$0,411\ 20 \times 10^{-3}$	+
$fl(z)$	$-0,4111 \times 10^{-3}$	$-0,411\ 10 \times 10^{-3}$	
$fl(y \oplus z)$	$0,1000 \times 10^{-6}$	$0,000\ 10 \times 10^{-3}$	

E

F

$fl(y \oplus z)$	$0,1000 \times 10^{-6}$	$0,000\ 00 \times 10^{1}$	+
$fl(x)$	$0,1403 \times 10^{1}$	$0,140\ 30 \times 10^{1}$	
$fl(b)$	$0,1403 \times 10^{1}$	$0,140\ 30 \times 10^{1}$	

5) $S_E = 0{,}140\,300\,01 \times 10^1$

$$fe(a) = 0{,}1403 \times 10^1$$

$$fe(b) = 0{,}1403 \times 10^1$$

$$\varepsilon_r = \frac{|S_E - fe(a)|}{|S_E|} =$$

$$= \frac{|0{,}140\,300\,01 \times 10^1 - 0{,}1403 \times 10^1|}{|0{,}140\,300\,01 \times 10^1|}$$

$$\simeq 7{,}127\,583\,237 \cdot 10^{-8}$$

$$\simeq 0{,}713 \cdot 10^{-7}$$

Esercizio 1.18 ✓
Sia data l'espressione
$$y = 4 - \sqrt{16 + x}.$$

1. Si studi tale espressione evidenziando i casi ed i valori di x per i quali essa può presentare problemi di instabilità numerica dovuta all'errore di cancellazione.
2. Si proponga, se possibile, un'espressione algebricamente equivalente che eviti alcuni problemi di instabilità.

0) Campo di Esistenza (C.E.)

$16 + x \geq 0 \qquad x \geq -16$

1) Errore di cancellazione

Cancellazione "pura"

1.A) $16 + x \simeq 0$ $\qquad x \simeq -16$ $\quad (x \geq -16)$

$$\begin{cases} x = -16 \\ y = 4 \end{cases}$$

1.B) $4 - \sqrt{16 + x} \simeq 0$ $\qquad x \simeq 0$, $\; |x| \simeq a_{min}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

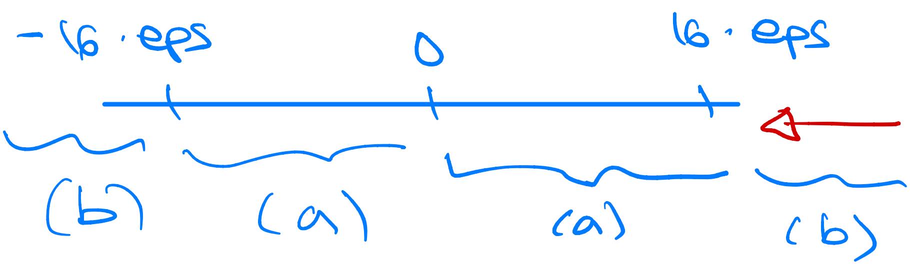
1.c) Cancellazione "quasi relazione anomala"

se $\frac{fl(y)}{fl(x)} < eps$ $\quad$ $fl(x) \oplus fl(y) = fl(x)$

$fl(x) \ominus fl(y) = fl(x)$

$\frac{|x|}{|16|} < eps$ $\quad$ $|x| < 16 \cdot eps$

$-16 \cdot eps < x < 16 \cdot eps$



a)

$16 + x = 16$

$y = 4 - \sqrt{16+x} = 4 - 4 = 0$

b) $16 + x \simeq 16$

$y = 4 - \sqrt{16+x} \simeq 4 - \sqrt{\simeq 16}$

$\simeq 4 - 4 \simeq 0$

2) $y = 4 - \sqrt{16+x} \cdot \frac{4 + \sqrt{16+x}}{4 + \sqrt{16+x}}$

$= \frac{16 - (16+x)}{4 + \sqrt{16+x}} = - \frac{x}{4 + \sqrt{16+x}}$

Esercizio 1.8 ✓

Supponendo che in un computer sia $x = fl(x) = 10^{-30}, y = fl(y) = 10^{30}, 1 = fl(1)$ e che si lavori in semplice precisione, per ognuna delle seguenti espressioni equivalenti (supponendo $x \neq 0$) si dica l'eventuale errore che si verifica, in quale operazione si verifica e si fornisca il valore di z.

$$a)\ z = x^2 + xy + 1, \qquad b)\ z = x(x+y) + 1,$$
$$c)\ z = x\left(x + \frac{1}{x}\right) + xy, \qquad d)\ z = x\left(x + y + \frac{1}{x}\right).$$

0) Soluzione ESATTA

$$x = fl(x) = 10^{-30}$$
$$y = fl(y) = 10^{30}$$
$$1 = fl(1) = 1$$

$$z_E = x^2 + xy + 1 = 10^{-60} + 1 + 1 = 2 + 10^{-60}$$

a) $x = fl(x) = 10^{-30}$

$$y = fl(y) = 10^{30}$$
$$1 = fl(1) = 1$$

$$z = x^2 + xy + 1 = \underbrace{10^{-60}}_{\text{Underflow}} + 1 + 1 = 2$$

b) $x = fl(x) = 10^{-30}$

$$y = fl(y) = 10^{30}$$
$$1 = fl(1) = 1$$

$$z = x \cdot (x+y) + 1 = 10^{-30} \cdot (10^{-30} + 10^{30}) + 1$$

Relaz. annulla

$$fl(10^{-30}) + fl(10^{30}) = fl(10^{30})$$

$$= 10^{-30} \cdot 10^{30} + 1 = 2$$

c) $x = fl(x) = 10^{-30}$

$y = fl(y) = 10^{30}$

$1 = fl(1) = 1$

$$z = x \cdot \Big(\underbrace{x + \frac{1}{x}}_{10^{-30} + 10^{30}}\Big) + xy = 10^{-30} \cdot \left(10^{30}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\underbrace{10^{-30} + 10^{30}}_{\text{Relaz. annulla}}$$

d) $x = fl(x) = 10^{-30}$

$y = fl(y) = 10^{30}$

$1 = fl(1) = 1$

$$z = x\left(x + y + \frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\underbrace{10^{-30} + 10^{30}}_{\text{Relaz. annulla}} + 10^{30}$$