SOLUZIONI - TUTORATO 8 - 08/05/2024

①

RECAP TEORICO:

SIA $P_A : V \to V$ APPLICAZIONE LINEARE, SIA $A \subset V$ SOTTOSP. DI V.

SE P_A È UNA PROIEZIONE ORTOGONALE SU A, ALLORA

$$P_A(v) = \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle v, u_2 \rangle \cdot u_2 + \dots + \langle v, u_m \rangle \cdot u_m$$

con $\{u_1, \dots, u_m\}$ base $\underbrace{\text{O.N.}}_{\text{"ORTONORMALE"}}$ di A.

TORNIAMO ALL'ESERCIZIO...

(a)

LA PROCEDURA È LA SEGUENTE:

(1) TROVARE UNA BASE O.N. DI A

(2) CALCOLIAMO $P_A(v)$ COME SCRITTO SOPRA

(1):

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y - z = 0\}$$

QUINDI, $\forall u \in A \to u = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t+2s \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R}$

$$= t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

UNA BASE DI A È $B_A = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{"}u_1\text{"}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{"}u_2\text{"}} \right\}$

SICCOME $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ NON È MULTIPLO DI $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

PER TROVARNE UNA ORTONORMALE UTILIZZIAMO GRAM-SCHMIDT:

~~$\tilde{u}_1 := u_1$~~

~~$\tilde{u}_2$~~

N.B.:

IN GENERALE ESSO MI DICE CHE SE HO $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ BASE DI V, ALLORA POSSO TROVARNE UNA ORTOGONALE $\tilde{B} = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n\}$ TRAMITE

$$\tilde{u}_1 := u_1$$

$$\tilde{u}_2 := u_2 - \frac{\langle u_2, \tilde{u}_1 \rangle}{\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle} \tilde{u}_1$$

$$\tilde{u}_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, \tilde{u}_2 \rangle}{\langle \tilde{u}_2, \tilde{u}_2 \rangle} \tilde{u}_2 - \frac{\langle u_3, \tilde{u}_1 \rangle}{\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle} \tilde{u}_1$$

$\vdots$

IN QUESTO CASO:

$$\tilde{u}_1 := u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, \tilde{u}_1 \rangle}{\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle} \tilde{u}_1$$

$$\tilde{u}_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE STANDARD / CANONICO

$$\langle u_2, \tilde{u}_1 \rangle = u_2 \cdot \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= (0 \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (2 \cdot 1)$$

$$= 2$$

~~$\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle =$~~

$$\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle \underset{\tilde{u}_1 = u_1}{=} \langle u_1, u_1 \rangle \underset{\text{PROD. SCALARE CANONICO}}{=} u_1 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2$$

QUINDI, $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

QUINDI $\tilde{B} = \{ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \}$ BASE ORTOGONALE DI A

[N.B: SE UNO VUOLE FARE UN CHECK (FACOLTATIVO) PUÒ VERIFICARE A MANO CHE $\tilde{B}$ SIA UNA BASE ORTOGONALE, OVVERO CHE

$\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \rangle = \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = 0$

INFATTI CIÒ È VERO, POICHÉ $\tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = -1 + 0 + 1 = 0$]

PER AVERE UNA BASE ORTONORMALE

POSSO DIVIDERE PER LA NORMA, QUINDI

$$e_1 = \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|} \qquad \text{dove } \|\tilde{u}_1\| = \sqrt{\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle}$$

$$e_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} \qquad \|\tilde{u}_2\| = \sqrt{\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \rangle}$$

E in PARTICOLARE, $\|\tilde{u}_1\|^2 = \langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle = \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_1 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\|\tilde{u}_2\|^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) + (1)(1) + 1 \cdot 1 = +1 + 1 + 1 = 3$$

QUINDI

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \{e_1, e_2\} \text{ BASE O.N. DI } A$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) ORA CHE ABBIAMO UNA BASE ON.,
POSSO USARE LA FORMULA SOPRA

$\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$P(\underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}) = \langle v, e_1\rangle \cdot \underbrace{e_1}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \langle v, e_2\rangle \cdot \underbrace{e_2}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\langle v, e_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \cdot x + y \cdot 0 + z \cdot 1\right) = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$$

$$\langle v, e_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-x + y + z\right)$$

QUINDI, $P(\overbrace{x, y, z}^{v}) = \frac{x+z}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-x+y+z\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{x+z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(-x+y+z\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x+z}{2} \\ 0 \\ \frac{x+z}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x-y-z}{3} \\ \frac{-x+y+z}{3} \\ (-x+y+z)/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x+z}{2} + \frac{x-y-z}{3} \\ \frac{-x+y+z}{3} \\ \frac{x+z}{2} + \frac{-x+y+z}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x+3z+2x-2y-2z}{6} \\ \frac{-x+y+z}{3} \\ \frac{3x+3z-2x+2y+2z}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(5x-2y+z)}{6} \\ \frac{-x+y+z}{3} \\ \frac{x+2y+5z}{6} \end{pmatrix} = P_A(x,y,z)$$

✓

QUESTA È LA P_A CHE VOLEVAMO!

(b)

ULTERIORE CHECK: PER DEF. VOGLIAMO CHE (1) $P_A(v) = 0 \quad \forall v \in A^\perp$

e

(2) $P_A(v) = v \quad \forall v \in A$

VERIFICHIAMOLE:

(1):

$A^\perp := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0,\ w \in A \}$

~~QUINDI~~ $\cancel{v = v \cdot w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot (}$

LA CONDIZIONE $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in A$

EQUIVALE A

$$(*) \begin{cases} \langle v, e_1 \rangle = 0 \\ \langle v, e_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

(POICHÉ $\forall w \in A \quad w = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$).

QUINDI IMPONIAMO $(*)$ SU UN $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

OTTENIAMO $\begin{cases} x = -z \\ x = z + y \end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases} \rightarrow \forall v \in A^\perp$ VALE $v = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$

$t \in \mathbb{R}$

OVVERO

$$A^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{NOT.}{=} \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

HA SENSO? SI, POICHÉ

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim A + \dim A^{\perp} = \overset{2+1}{\cancel{\ldots}}$$

$$A \oplus A^{\perp} = \mathbb{R}^3$$

(POICHÉ $A \cap A^{\perp} = \{\vec{0}\}$)

ALLORA, VERIFICHIAMO LA (1):

$P_A(v) = 0 \quad \forall v \in A^{\perp}$ POICHÉ

USO P_A TROVATA

$$P_A(v) = P_A\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{LINEARITÀ}}{=} \lambda P_A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5\cdot(-1) - 2(-2) + 1 \\ \frac{+1 -2 +1}{3} \\ \frac{-1 -4 +5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v \in A^{\perp} \iff v = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

COME ATTESO!!!

② VALE ANCHE LA (2) ?

SÌ, VERIFICHIAMOLO: $\forall u \in A$ (i.e. $u = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$)

$$P_A(u) = \begin{pmatrix} (5\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2)/6 \\ (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2)/3 \\ (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_1 + 10\lambda_2)/6 \end{pmatrix} =$$

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{6}\lambda_1/\cancel{6} \\ \cancel{3}\lambda_2/\cancel{3} \\ \dfrac{6\lambda_1 + 12\lambda_2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = u$$

QUINDI (2) VALE!

(FINE DEL CHECK!)

↓

ICTP

www.ictp.it

(c) DA (a) SAPPIAMO CHE

$$P_A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{5x-2y+z}{6} \\ \frac{-x+y+z}{3} \\ \frac{x+2y+5z}{6} \end{pmatrix}$$

DUNQUE, USANDO $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$,

SAPPIAMO CHE

$$P_A(1,0,0) = \left(\frac{5}{6}, -1/3, 1/6 \right) = \frac{5}{6}(1,0,0) - \frac{1}{3}(0,1,0) + \frac{1}{6}(0,0,1)$$

$$P_A(0,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$P_A(0,0,1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6} \right)$$

DA CUI $M^{P_A}_{C,C} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}$

(2)

RECAP:

LA PROCEDURA DI CONTO È STANDARD ED È LA SEGUENTE:

(1) SI CALCOLA IL POLINOMIO CARATTERISTICO $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathbb{I})$

(2) SI CALCOLANO I SUOI ZERI, I.E. λ T.C. $P_A(\lambda) = 0$

(3) SI VERIFICA LA VALIDITÀ DEL SEGUENTE TEOREMA:

TEOREMA:

A È DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE

- IL NUMERO DI AUTOVALORI DI A (CONTATI CON LE RISPETTIVE MOLTEPLICITÀ) È UGUALE ALL'ORDINE DELLA MATRICE
- LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI OGNI AUTOVALORE COINCIDE CON QUELLA GEOMETRICA

METTIAMO IN PRATICA LA PROCEDURA CON

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1)
$$P_A(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

ICTP
www.ictp.it

$$= \cancel{\quad} + 0 \cdot \cancel{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}} - 0 \cdot \cancel{\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} +$$

$$+ (2-\lambda) \det\begin{pmatrix} -\lambda & +1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

USO LO SVILUPPO DI LAPLACE SULLA 3° RIGA

$$= (2-\lambda)(\lambda^2+1)$$

(2) $P_A(\lambda) = 0 \longleftrightarrow$ $\lambda = 2$ OPPURE $\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ MA ESSA NON HA SOLUZIONI REALI, INFATTI LE SOLUZIONI SONO $\lambda = \pm i$

(3) QUINDI IL NUMERO DI AUTOVALORI ~~(...)~~ CHE STANNO IN $\mathbb{R}$ È 1 MENTRE L'ORDINE DELLA MATRICE È 3 (i.e. UNA MATRICE 3x3)

$\longrightarrow$ A NON DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$.

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1)

$$P_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} +$$

LAPLACE SULLA 3° COLONNA

$$+ (5-\lambda) \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -1\left(2(2-\lambda) + 1(2-\lambda)\right) - 2\left((5-\lambda)^2 - 1\right) +$$

$$+ (5-\lambda)\left((5-\lambda)(2-\lambda) - 4\right) =$$

$$= -4 + 2\lambda - 2 + \lambda - 2(5-\lambda)^2 + 2 + (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 4(5-\lambda) =$$

$(25$ [illegible] $^2 - 10\lambda)(2-\lambda) - 4(5-\lambda)$

$= \cdots =$

$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda$

$= -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = -\lambda(\lambda-6)^2$

(2) $P_A(\lambda) = 0 \iff \underset{\text{OPPURE}}{\lambda = 0}$ (molt. alg. $= 1$)

$\lambda = 6$ (molt. alg. $= 2$)

VERIFICHIAMO SE m.a. = m.g. PER $\lambda = 0, \lambda = 6$:

PER FARLO CI SONO ~~TRE~~ VARI METODI, MA POSSIAMO ANCHE ~~FARE UN~~ CONTO DIRETTO DEGLI AUTOSPAZI E VERIFICA A MANO DI CERCARE SIA LA DIMENSIONE

QUINDI:

- $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 \mathbb{I})v = 0 \xrightarrow{\lambda = 0} Av = 0 \to \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 5x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ RISOLVENDO IL SISTEMA

$\dots$

$\downarrow$

$$\begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, \; z \in \mathbb{R}$$

QUINDI $\quad E_{\lambda_1 = 0} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $\lambda_2 = 6$:

$(A - \lambda_2 \mathbb{I})v = 0$

$\downarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5-6 & 2 & -1 \\ 2 & 2-6 & 2 \\ -1 & 2 & 5-6 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ICTP
www.ictp.it

QUINDI:

$$\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{RISOLVENDO}} \cdots \rightarrow \left\{ x = 2y - z \right.$$

DUNQUE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $y, z \in \mathbb{R}$

$$= y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DA CUI

$$E_{\lambda_2=6} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

NOTIAMO CHE

$m.g.(\lambda_1=0) \overset{def.}{=} \dim E_{\lambda_1=0}$ È UGUALE A $m.a.(\lambda_1=0)=1$

E

$m.g.(\lambda_2=6) = \dim E_{\lambda_2=6}$ È UGUALE A $m.a.(\lambda_2=6)=2$

DUNQUE, A È DIAGONALIZZ. SU $\mathbb{R}$

PER TROVARE LA MATRICE DIAGONALE BASTA METTERE GLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE i.e.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ED ESSA SI PUO' RICAVARE USANDO

$$D = P^{-1} A P$$

DOVE $P = \left[\begin{array}{c} \text{AUTOVETTORE} \\ \text{CORRISP. A} \\ \lambda = 0 \end{array}, \begin{array}{c} 1^\circ \\ \text{AUTOVETT.} \\ \text{CORRISP.} \\ \text{A} \\ \lambda = 6 \end{array}, \begin{array}{c} 2^\circ \\ \text{AUTOVETT.} \\ \text{CORRISP.} \\ \text{A} \\ \lambda = 6 \end{array} \right]$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Check: VERIFICATE CHE

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & +1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ICTP
www.ictp.it

(3)

$$A = \begin{pmatrix} -2k-4 & -3k-4 \\ 2k+3 & 3k+3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -2k-4-\lambda & -3k-4 \\ 2k+3 & 3k+3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2k-4-\lambda)(3k+3-\lambda) - (-3k-4)(2k+3) =$$

$$= -6k^2 - 6k + 2k\lambda - 12k - 12 + 4\lambda - 3k\lambda - 3\lambda +$$

$$+ \lambda^2 + 6k^2 + 8k + 9k + 12 =$$

$$= \lambda^2 + (1-k)\lambda - k$$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{-(1-k) \pm \sqrt{(1-k)^2 + 4k^2}}{2} =$$

$$= \frac{-1+k \pm \sqrt{1+k^2+2k}}{2}$$

$$= \frac{-1+k \pm \sqrt{(k+1)^2}}{2} = \frac{-1+k \pm (k+1)}{2}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$
$(k+1)^2 \geq 0$

QUINDI, $\forall k \in \mathbb{R}$, CI SONO 2 SOLUZIONI

$$\lambda_1 = \frac{-1+k-(k+1)}{2} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{-1+k+(k+1)}{2} = k$$

SAPPIAMO (DA UN TEOREMA) CHE MATRICI CON AUTOVALORI REALI DISTINTI SONO DIAGONALIZZ.,

QUINDI $\forall k \neq -1 \rightarrow A$ diagonalizz.

PER $k=-1$? ~~CALCOLIAMOLO A PARTE~~
NON POSSIAMO CONCLUDERE

- CASO 1: $k=-1$

$$A_{k=-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI, AUTOVETTORI?

$$\lambda = -1 \rightarrow (A - \lambda \mathbb{I})v = 0$$

$$(A + \mathbb{I})v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x+y=0 \\ \downarrow \\ x=-y \end{matrix} \rightarrow$$

$\rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ MA

QUINDI

$$m.g.(\lambda=-1) \overset{def.}{=} \dim E_{\lambda=-1} = 1$$

$\neq$

MA

$$m.a.(\lambda=-1) = 2$$

QUINDI

PER $k=-1$

A NON È DIAGONALIZZ.

CALCOLIAMONE

ICTP

www.ictp.it

(1)

RECAP:

$F: V \times W \to \mathbb{R}$ si dice BILINEARE SE

$$F(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha F(v_1, w) + \beta F(v_2, w)$$

E

$$F(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha F(v, w_1) + \beta F(v, w_2)$$

(a) $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$

$$F(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = F(\alpha \overbrace{(x_1, x_2, x_3)}^{v_1} + \beta \overbrace{(y_1, y_2, y_3)}^{v_2}, \overbrace{(z_1, z_2, z_3)}^{w}) =$$

$$= F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3), (z_1, z_2, z_3)) =$$

$$\underset{\text{def. } F}{=} \left[-3(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha x_2 + \beta y_2\right] z_1 +$$

$$+ \left[(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3)\right] z_2$$

$$- (\alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3) z_3 =$$

$$= -3\alpha x_1 z_1 - 3\beta y_1 z_1 + \alpha z_1 x_2 + \beta z_1 y_2 +$$

$$+ \alpha x_1 z_2 + \beta y_1 z_2 + 2\alpha x_2 z_2 + 2\beta y_2 z_2 +$$

$$- \alpha x_3 z_2 - \beta y_3 z_2 - \alpha x_2 z_3 - \beta y_2 z_3 +$$

$$- \alpha x_3 z_3 - \beta y_3 z_3$$

vs

$$\alpha F(v_1, w) + \beta F(v_2, w) = \alpha F(\overbrace{(x_1, x_2, x_3)}^{v_1}, \overbrace{(z_1, z_2, z_3)}^{w}) +$$

$$+ \beta F(\underbrace{(y_1, y_2, y_3)}_{v_2}, \underbrace{(z_1, z_2, z_3)}_{w})) =$$

$$\overset{\text{def. } F}{=} \alpha\left[(-3x_1 + x_2)z_1 + (x_1 + 2x_2 - x_3)z_2 - (x_2 + x_3)z_3\right] +$$

$$+ \beta\left[(-3y_1 + y_2)z_1 + (y_1 + 2y_2 - y_3)z_2 - (y_2 + y_3)z_3\right] =$$

$$= -3\alpha x_1 z_1 + \alpha x_2 z_1 + \alpha x_1 z_2 + 2\alpha x_2 z_2 - \alpha x_3 z_2 +$$

$$- \alpha x_2 z_3 - \alpha x_3 z_3 - 3\beta y_1 z_1 + \beta y_2 z_1 +$$

$$+ \beta y_1 z_2 + 2\beta y_2 z_2 - \beta y_3 z_2 - \beta y_2 z_3 +$$

$$- \beta y_3 z_3$$

→ QUINDI LINEARITÀ A SINISTRA ✓

SI PUÒ VERIFICARE ANALOGAMENTE CHE VALE ANCHE $F(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha F(v, w_1) + \beta F(v, w_2)$

(STESSA PROCEDURA!) ...

(ALL'ESAME SE RICHIESTA LA BILINEARITÀ VA FATTO!)

(b) $M^F_{C} = ?$

REGOLA: DATA UNA FORMA BILINEARE $F: V \times V \to \mathbb{R}$ SAPPIAMO CHE LA MATRICE ASSOCIATA A F RISPETTO AD UNA BASE B DI V È

$$M^F_B = \begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & \cdots & F(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \\ F(v_n, v_1) & \cdots & F(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

DOVE $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

NEL NOSTRO CASO, $B = C = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{= v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{= v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{= v_3} \right\}$

QUINDI ?

$$F(v_1, v_1) = F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = (-3\cdot 1 + 0)\cdot 1 + (\,-\,-\,)\cdot 0 + -(\,-\,-\,)\cdot 0 = -3$$

INUTILE SCRIVERLO POICHÉ TANTO C'È UN "0" FUORI !!!

$$F(v_1, v_2) = F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = (\,-\,-\,)\cdot 0 + (1 + 2\cdot 0 - 0)\cdot 1 + (\,-\,-\,)\cdot 0 = 1$$

$$F(v_1, v_3) = F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = (\,-\,-\,)\cdot 0 + (\,-\,-\,)\cdot 0 + (0+0)\cdot 1 = 0$$

ANALOGAMENTE SI TROVA

$F(v_2, v_1) = 1$

$F(v_2, v_2) = 2$

$F(v_2, v_3) = -1$

$F(v_3, v_1) = 0$

$F(v_3, v_2) = -1$

$F(v_3, v_3) = -1$

$$M_C^F = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

RECAP: UN PRODOTTO SCALARE (REALE) SU V È UNA FORMA BILINEARE $f: V \times V \to \mathbb{R}$, SIMMETRICA, DEFINITA POSITIVA.

F ABBIAMO MOSTRATO GIÀ CHE È BILINEARE, VERIFICHIAMO LE ALTRE DUE PROPRIETÀ

• SIMMETRICA?

$$F(v_1, v_2) = F(\overbrace{(x_1, x_2, x_3)}^{v_1}, \overbrace{(y_1, y_2, y_3)}^{v_2}) =$$

$$= (-3x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + 2x_2 - x_3)y_2 - (x_2 + x_3)y_3$$

$$= -3x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 - x_3y_3$$

VS

$$F(v_2, v_1) = F(\underbrace{(y_1, y_2, y_3)}_{v_2}, \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{v_1}) =$$

$$= (-3y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2 - y_3)x_2 - (y_2 + y_3)x_3$$

$$= -3y_1x_1 + y_2x_1 + y_1x_2 + 2y_2x_2 - y_3x_2 - y_2x_3 + - y_3x_3$$

$$f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1) \longrightarrow \text{SIMMETRICA}$$

f DEF. POSITIVA?

PER VEDERE SE f DEF. POSITIVA BASTA VEDERE CHE UNA SUA MATRICE ASSOCIATA LO SIA, OVVERO CHE TUTTI I SUOI AUTOVALORI SIANO POSITIVI, VEDIAMO:

$$M_C^F = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\det(} \; P_{M_C^F}(\lambda) = \det\left(M_C^F - \lambda \underset{I}{\mathbb{I}}\right) = 0$$

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{\parallel} = 0$$

SVILUPPO 1° COLONNA $\longrightarrow$

$$(-3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$(-3-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 1\right] - \cancel{\det} \; (-3-\lambda)(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda + 10$$

ICTP

www.ictp.it

→ via risoluzione di questa eq. troviamo

un autovalore < 0

↓

<u>NO</u> def. positiva

↓

<u>NO</u> prodotto scalare