SOLUZIONI TUTORATO 6

① VEDI IL FILE "ESERCIZI 6 – 17.04.24 – TUTORATO"

② VEDI TUTORATO 5

③ VEDI TUTORATO 5

④

IL DETERMINANTE È DEFINITO SOLO PER MATRICI QUADRATE, DUNQUE

$\nexists \det B$, $\nexists \det D$

~~[illegible]~~

- $\det A = \det 7 = 7$
- $\det C = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

PER MATRICI 2×2 È PIÙ COMODO RICORDARSI QUESTA FORMULA A MEMORIA!

INVECE PER 3×3, 4×4, etc USO LAPLACE (MA C'È PIÙ DI UN MODO...

$$\cdot \det E = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{+0 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=0} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

SVILUPPO CON LAPLACE
LUNGO LA
1° RIGA

$$= -1 \cdot \left(-5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \right) + 4 \left(-5 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \right) =$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - bc$$

$$= -1(-5-2) + 4(-10-7) = 7 - 68 = -61$$

$$\cdot \det F = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{-0 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} +$$

SVILUPPO CON LAPLACE
LUNGO LA 2° COLONNA

$$\cancel{-0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=B} =$$

$$= 5\underbrace{\left[\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]}_{\det A} +$$

SVILUPPO LA 1° MATRICE, A, CON LAPLACE LUNGO LA 3° RIGA E LA 2° MATRICE, B, LUNGO LA 1° COLONNA

$$+1\cdot\underbrace{\left[1\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right]}_{\det B} =$$

$$= 5\cdot\left[(2\cdot 3 - 3\cdot 1) - (1\cdot 3 - 3\cdot 2) + (1\cdot 1 - 2\cdot 2)\right] +$$

$$+1\cdot\left[(7\cdot 3 - 1\cdot 1) - 4(2\cdot 3 - 3\cdot 1) + 2\cdot(2\cdot 1 - 3\cdot 7)\right] =$$

$$= 5\cdot\left[3 - (-3) + (-3)\right] + 1\left[20 - 4\cdot(3) + 2(-19)\right] =$$

$$= 5\cdot 3 + (20 - 12 - 38) = 15 + (-30) = -15$$

5. CI SONO VARI MODI PER CALCOLARE L'INVERSA DI UNA MATRICE,

~~PER MATRICI 2x2 VALE [illegible] RICORDIAMO LA FORMULETTA~~

ORA UTILIZZERÒ IL METODO BASATO SULLA MATRICE DEI COFATTORI, OVVERO

SE $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Cof(a_{11}) & Cof(a_{12}) \\ Cof(a_{21}) & Cof(a_{22}) \end{pmatrix}^T}_{\text{Trasposta}}$

dove $Cof(a_{ij}) = (-1)^{ij} \det(\underbrace{A_{ij}}_{\shortparallel})$

SOTTOMATRICE OTTENUTA DA A ELIMINANDO i-ESIMA RIGA E J-ESIMA COLONNA

QUESTA FORMULA NON VALE SOLO PER MATRICI 2x2 MA PER MATRICI (QUADRATE) QUALSIASI!

<u>CAPIAMO COME USARLA</u>: L'INVERSA ESISTE SOLO PER MATRICI QUADRATE, DUNQUE $\nexists B^{-1}, \nexists D^{-1}$.

- $A = 7 \longrightarrow A^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

INFATTI $\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{7 \cdot \frac{1}{7}} = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{\frac{1}{7} \cdot 7} = 1$

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \longmapsto \det C = 0$

$\downarrow$

$\nexists C^{-1}$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$E^{-1} = \frac{1}{\det E} \cdot \begin{pmatrix} Cof(a_{11}) & Cof(a_{12}) & Cof(a_{13}) \\ Cof(a_{21}) & Cof(a_{22}) & Cof(a_{23}) \\ Cof(a_{31}) & Cof(a_{32}) & Cof(a_{33}) \end{pmatrix}^T$$

$$\frac{1}{\det E} = -\frac{1}{61}$$

$$-\frac{1}{61}$$

~~Cof(a) =~~

$$\downarrow$$

CALCOLIAMO TUTTI I COFATTORI:

$$Cof(a_{11}) = \cancel{\det} + \det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$Cof(a_{12}) = -\det\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 7$$

$$Cof(a_{13}) = +\det\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -17$$

$$Cof(a_{21}) = -\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{8} + 7$$

$$Cof(a_{22}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$Cof(a_{23}) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$Cof(a_{31}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = -26$$

$$Cof(a_{32}) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = 20$$

$$\mathrm{Cof}(a_{33}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = -5$$

DA CUI

$$E^{-1} = -\frac{1}{61}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -17 \\ 7 & -4 & 1 \\ -26 & 20 & -5 \end{pmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{61}\begin{pmatrix} 3 & 7 & -26 \\ 7 & -4 & 20 \\ -17 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

USO LA TRASPOSTA!

- $F^{-1} = ?$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ ① MATRICE QUADRATA ✓

~~[illegible] dei cofattori~~

$\det F = -15 \neq 0 \rightarrow \exists F^{-1}$

POTREMMO USARE ANCHE QUA IL CALCOLO DI F^{-1} CON LA MATRICE DEI COFATTORI MA (ESSENDO F UNA MATRICE 4x4) È PIUTTOSTO LUNGO...

USIAMO IL METODO DI GAUSS-JORDAN, OVVERO:

① $A^{-1} = ?$ AFFIANCO A ALL'IDENTITÀ, CIOÈ

$$(A \mid I)$$

② RIDUCO $(A \mid I)$ IN FORMA A SCALA / A GRADINI

③ ~~[illegible]~~ ANNULLARE TUTTI I NUMERI SOPRA I PIVOT DELLA MATRICE RIDOTTA

④ RENDERE TUTTI I PIVOTS UGUALI A 1 (TRAMITE MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI)

⑤ SI TROVERÀ ~~[illegible]~~

$$(I \mid G\cancel{B})$$

$G\ \cancel{B} = A^{-1}$ OVVERO QUESTA B TROVATA È PROPRIO L'INVERSA DI A.

APPLICHIAMOLO PER F:

$$(F \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\longleftrightarrow$
$\mathrm{II}-4\mathrm{I}$
$\mathrm{III}-2\mathrm{I}$
$\mathrm{IV}-\mathrm{I}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -11 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\longleftrightarrow$
$\mathrm{II}/5$
poi
$\mathrm{IV}-5\cdot\mathrm{II}$
e
$\mathrm{III}/(-3)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -11/5 & -4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & +2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/5 & 1/5 & -1/5 & -1/5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\longleftrightarrow$
$\mathrm{IV}+\frac{4}{5}\mathrm{III}$
poi
$\mathrm{III}-\mathrm{IV}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & -11/5 & -4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/5 & -1/15 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/5 & -4/15 & 1 \end{array}\right)$$

$\longleftrightarrow$
$\mathrm{I}-3\mathrm{IV}$
e
$\mathrm{II}+\frac{1}{5}\mathrm{III}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3/5 & 4/5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -3/5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & 1 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \quad I - 2\boxed{I} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} & 1 \end{array}\right) =$$

$$= (\mathbb{I} \mid G) \to G = F^{-1} \longrightarrow G = F^{-1}$$

6 REVIEW DELLA TEORIA:

IN GENERALE, PER RICORDIAMOCI COME COSTRUIRE LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE BASTA CONSIDERARE L'APPLICAZIONE LINEARE IDENTITÀ, OVVERO

$$id: V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto id(v) = v$$

DA QUA, SAPPIAMO CHE $\forall\, V$ SPAZIO VETT. (REALE) DI $\dim n$, VALE $V \cong \mathbb{R}^n$

INFATTI
$$\varphi_B: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

SCELGO UNA BASE $B_V = \{e_1, \dots, e_n\}$ DI V

QUINDI, CONSIDERIAMO IL SEGUENTE DIAGRAMMA:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id"] & V \\
v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi_B"'] & id(v) = v \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\
\varphi_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \arrow[r, mapsto] & \varphi_{B'}(v) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

DOVE $\varphi_B(v) = \varphi_B(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$

SCRIVO v COME COMB. LINEARE DI VETTORI DI $B = \{e_1, \dots, e_m\}$

$$\varphi_{B'}(v) = \varphi_{B'}(\mu_1 e'_1 + \dots + \mu_m e'_m) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

SCRIVO v COME COMB. LINEARE DI VETTORI DI $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ (BASE DI V $\neq$ DA B)

LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DA B A B' IN V È LA MATRICE ASSOCIATA A id_V NELLE BASI B DEL DOMINIO E DI B' DEL CODOMINIO.
DUNQUE LA POSSO TROVARE COME SI FA PER UNA MAPPA LINEARE QUALSIASI!

TORNIAMO ALL'ESERCIZIO E VEDIAMO COME SI FA:

$$V = \mathbb{R}^2, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

QUA USO ~~BASE~~ C COME BASE DI $\mathbb{R}^2$

QUA USO B COME BASE DI $\mathbb{R}^2$

PERCHÉ?

PERCHÉ MI DICE "DA C A B" IN $\mathbb{R}^2$.

DUNQUE,

$$id_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

SCRIVO COME COMB. LINEARE DI B

$$id_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

NOTIAMO CHE $\alpha =$, $\beta =$ POICHÉ

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I} & \alpha+\beta = 1 \\ \text{II} & 2\alpha+\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \beta = -2\alpha$$

$\alpha = -1/2$

$\beta = 1/2$

DA CUI,

I:

$\alpha - 2\alpha = 1$

$-\alpha = 1 \rightarrow \alpha = -1$

QUINDI $\beta = 2$ $\rightarrow$ $\alpha = -1$, $\beta = 2$

ANALOGAMENTE,

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\gamma+\delta = 0\\ 2\gamma+\delta = 1\end{cases} \rightarrow$$

RISOLVO, TROVO:

$\gamma = 1$

$\delta = -1$

QUINDI:

$$id\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$id\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

DA CUI, LA MATRICE ASSOCIATA È

$$M_{C \to B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

DUNQUE, SE HO UN VETTORE $v \in \mathbb{R}^2$ SCRITTO NELLA BASE C CON COMPONENTI $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_C$, POSSO TROVARE LE SUE COMPONENTI NELLA BASE B COME: $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_B = M_{C \to B} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_C$