SOLUZIONI TUTORATO 5
(10/04/2024)

① - ②: VEDI TUTORATO 4

③ $f: V \to W$, $v \mapsto f(v)$ È LINEARE SE $\begin{cases} f(\lambda v) = \lambda f(v) \\ f(v+w) = f(v) + f(w) \end{cases}$

INOLTRE, UNA CONDIZIONE NECESSARIA (MA <u>NON</u> SUFFICIENTE) PER LA LINEARITÀ DI f È $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

VERIFICHIAMO PER QUALI $k \in \mathbb{R}$ VALE CIÒ:

$$f(\vec{0}) = f(0,0,0) = (k \cdot 0,\ 0(k-1)+0,\ 0+(k-1)^2 \cdot 0,\ (k-1)\cdot 0^2 + 0) = (0,0,0,0) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

QUINDI ~~...~~ $f(\vec{0}) = \vec{0}$ <u>NON</u> CI AIUTA QUA!

- ADDITIVITÀ ($f(v+w) = f(v) + f(w)$):

$$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) =$$

$$= (k(y_1 + y_2),\ (k-1)(x_1 + x_2) + z_1 + z_2,\ x_1 + x_2 + (k-1)^2(y_1+y_2),\ (k-1)(x_1 + x_2)^2 + z_1 + z_2)$$

D'ALTRA PARTE

$f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) =$

$= (ky_1, (k-1)x_1 + z_1, x_1 + (k-1)^2 y_1, (k-1)x_1^2 + z_1) +$

$+ (ky_2, (k-1)x_2 + z_2, x_2 + (k-1)^2 y_2, (k-1)^2 x_2^2 + z_2) =$

$= \big(k(y_1+y_2), (k-1)(x_1+x_2) + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + (k-1)^2 (y_1+y_2),$

$, (k-1)(x_1^2 + x_2^2) + z_1 + z_2 \big)$

$$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \overset{!}{=} f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$\Updownarrow$ SE E SOLO SE

$$(k-1)(x_1^2 + x_2^2) + z_1 + z_2 = (k-1)(x_1+x_2)^2 + z_1 + z_2$$

OVVERO

$$(k-1)(x_1^2 + x_2^2) = \underbrace{(k-1)(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2)}_{(k-1)(x_1^2+x_2^2) + 2x_1x_2(k-1)}$$

CHE VALE SOLO SE $k-1=0$

CIOÈ $\boxed{k=1}$

N.B.: CE LO ASPETTAVAMO!
INFATTI f CONTIENE (NELLA SUA IMMAGINE) TERMINI QUADRATICI IN x, y CHE VOGLIAMO NULLI →

→ CIÒ VALE SE $k=1$

~~INFATTI~~ PIÙ ESPLICITAMENTE:

$$f(x,y,z)=\big(ky,\ (k-1)x+z,\ x+\underbrace{(k-1)^2}_{\substack{\| \\ 0}}y,\ \underbrace{(k-1)}_{\substack{\| \\ 0}}x^2+z\big)$$

$\Rightarrow k=1$

(COSICCHÉ NON HO $\sim x^2, \sim y^2$)

- OMOGENEITÀ ($f(\lambda v)=\lambda f(v)$):

IMPONIAMO $k=1$ E VERIFICHIAMO L'OMOGENEITÀ:

$$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \underset{\text{uso def. di } f}{=} (\lambda y, \lambda z, \lambda x, \lambda z) =$$

$$= \lambda\underbrace{(y,z,x,z)}_{\substack{\| \\ f(x,y,z)}}$$

INFATTI PER $k=1$ $f(x,y,z)=(y,z,x,z)$

→ PER $k=1$ f È LINEARE (COME ATTESO!) MENTRE $\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ NO!

(*) NOTA TEORICA:

SIA $f: V \to W$ UNA MAPPA LINEARE T.C.

$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

- SE $\{v_1, \dots, v_n\}$ BASE DI $V \to f$ ESISTE E UNICA
- SE $\{v_1, \dots, v_n\}$ NON È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V MA È COSTITUITO DA VETTORI LIN. INDIP. TRA LORO, ALLORA f ESISTE MA NON È UNICA
- ~~SE $\{v_1, \dots, v_n\}$ BASE NON È UN SISTEMA DI GENERATORI DI V ED È LINEARMENTE DIPENDENTE OPPURE NON È UN SISTEMA DI GENERATORI DI V ED È LIN. INDIP.~~

IN TUTTI GLI ALTRI CASI BISOGNA VERIFICARE A MANO LA CONSISTENZA DI UNA DEF DI f

---

IN QUESTO CASO v_1, v_2, v_3 SONO LIN. DIPENDENTI, INFATTI

$$\underbrace{v_3}_{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}} = \underbrace{v_1}_{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{v_2}_{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

QUINDI SIAMO UNA CONDIZIONE DOVE IL TEOREMA SOPRA NON SI APPLICA!

$\downarrow$

$g(v_1+v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER LINEARITÀ}}}{=} g(v_1)+g(v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER DEF DI } g}}{=} (1,2,-1,2)+(1,2,7,-1)$

$= (2,4,6,1)$

D'ALTRA PARTE

$g(\underbrace{v_3}_{\substack{\| \\ v_1+v_2}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{USO DEF. DI } g}}{=} (2,0,-1,3)$

SONO $\neq$, QUINDI UNA TALE g LINEARE NON ESISTE!

⑤ (a)

LE BASI CANONICHE DI DOMINIO E CODOMINIO SONO

$C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ PER $\mathbb{R}^3$

$C' = \{(1,0),(0,1)\}$ PER $\mathbb{R}^2$.

APPLICO F AI VETTORI DI C:

$F(1,0,0) = (1-0,0) = (1,0)$

$F(0,1,0) = (0-1,0) = (-1,0)$

$F(0,0,1) = (0-0,1) = (0,1)$

ORA DEVO SCRIVERE ~~...~~ $F(1,0,0)$,

$F(0,1,0)$ E $F(0,0,1)$ COME

COMB. LINEARE DEI VETTORI DI C'

MA ESSENDO C' BASE CANONICA

È MOLTO SEMPLICE, INFATTI:

$$F(1,0,0) = (1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1)$$

$$F(0,1,0) = (-1,0) = -1(1,0) + 0\cdot(0,1)$$

$$F(0,0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$$

DA QUI LA MATRICE DI F RISPETTO A C, C'

È

$$M_F^{C,C'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OTTENUTA METTENDO <u>IN COLONNA</u> I 6 COEFFICIENTI

CERCHIATI SOPRA.

(b) $C' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ PER DOMINIO

$B = \{(1,1), (-1,1)\}$ PER CODOMINIO

QUINDI $F(1,0,0) = (1,0) = \alpha\cdot(1,1) + \beta(-1,1)$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha - \beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 1 \\ 0 = 2\beta + 1 \rightarrow \beta = -1/2 \end{cases}$$

da cui $\alpha = +1/2$

QUINDI $F(1,0,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$

B

~~ANALOGAMENTE~~

$$\cancel{F(0,1,0) = (-1,0) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)}$$

$$\cancel{\rightarrow \begin{cases} -1 = \alpha - \beta \\ 0 = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = -\beta, \text{ da cui } -1 = -2\beta \end{cases}}$$

$$\cancel{\beta = 1/2}$$

$$\cancel{\alpha = -1/2}$$

$$F(0,1,0) = (-1,0) = -(1,0) = -\frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1)$$

BASTA USARE B

$$F(0,0,1) = (0,1) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta = 1/2$$

OVVERO $F(0,0,1) = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1)$

IN CONCLUSIONE LA MATRICE DI F RISPETTO ALLE BASI C_1, B È:

$$M_f^{C_1,B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(6)

a) $\underline{\ker f}$: $\vec{v}$ t.c. $f(\vec{v}) = 0$

CI SONO 2 MODI PER FARLO:

<u>MODO 1</u> (SENZA USARE MATRICE DI f):

USO LA DEF., DUNQUE VOGLIO TROVARE:

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ t.c. $f(x_1,x_2,x_3) = (0;0)$

OVVERO (USANDO LA DEF. DI f):

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{RISOLVO}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow[2\mathrm{II}-\mathrm{I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{III}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

OVVERO $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ I

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 = -x_2/2$$

QUINDI, $\ker f = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} -x_2/2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

DA CUI UNA BASE È $B_{\ker f} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dim \ker f = 1$

<u>MODO 2</u>:

SCRIVO LA MATRICE ASSOCIATA A f RISPETTO A UNA BASE B DEL DOMINIO E B' DEL DOMINIO, AD ESEMPIO B, B' LE PRENDO CANONICHE OVVERO

$$B = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{= e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{= e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{= e_3} \}$$

$B' = B$

POICHÉ DOMINIO ≡ CODOMINIO QUA!

DUNQUE, $f(e_1) = f(1,0,0) = (4,2,0)$

$f(e_2) = (2,1,0)$

$f(e_3) = (1,1,-1)$

$$\rightarrow M_f^{C,C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

DA CUI PER TROVARE $\ker f_{\mathbb{Z}}$ IMPONGO

$$M_f^{c,c} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

OVVERO

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ È LO STESSO SISTEMA DI PRIMA, QUINDI (RISOLVENDOLO) SI TROVERÀ LO STESSO RISULTATO!

(b) $\underline{\operatorname{Im} f}$:

UN MODO VELOCE È SCRIVERE f IN TERMINI MATRICIALI E USARE IL FATTO CHE L'IMMAGINE DI f RELATIVA AI VETTORI DI BASE DEL DOMINIO FORNISCONO UN SISTEMA DI GENERATORI PER $\operatorname{Im} f$, IN ALTRE PAROLE (USANDO $M_f^{c,c}$) POSSO DIRE CHE

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \}$

ESTRAIAMO UNA BASE COL METODO DI GAUSS:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

DOVREI FARNE LA RIDUZIONE A SCALA MA LO ABBIAMO GIÀ FATTO NEL PUNTO (a), QUINDI SAPPIAMO GIÀ CHE LA MATRICE SOPRA DIVENTA

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ 2 VETTORI LIN. INDIP. QUINDI

$$B_{img} = \{ (2, 1, 0), (1, 1, -1) \}$$

CE LO ASPETTAVAMO ?

SÌ, POICHÉ DAL TEOREMA DEL RANGO

$$\underset{\underset{\dim \mathbb{R}^3 = 3}{\parallel}}{\dim(\text{DOMINIO})} = \underbrace{\dim \ker f}_{\underset{1}{\parallel}} + \dim \operatorname{Im} f$$

$\rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f$ DOVEVA ESSERE NECESSARIAMENTE:

$$3 - 1 = 2.$$