SOLUZIONI TUTORATO 4 (03/04/2024):

① VEDI SOLUZIONI ES. 5 TUTORATO 3 (27/03/2024)

②

- $U_1: \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_4 = x_2 + x_3 \end{cases}$

QUINDI $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U_1$ SE È DELLA FORMA

$$\begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DUNQUE $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ GENERATORI PER U_1

SONO LIN. INDIP. ?

SI, POICHÉ NON SONO L'UNO MULTIPLO DELL'ALTRO

$\downarrow$

QUINDI

$$B_{U_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

BASE DI U_1.

U_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ GENERATORI DI U_2 (PER IPOTESI),

QUINDI LA DOMANDA È: SONO LIN. INDIP. ?

SI, POICHÉ NON SONO MULTIPLO L'UNO DELL'ALTRO,

INFATTI SE PONIAMO

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 0 = 1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \rightarrow \nexists \lambda$$

QUINDI

$$B_{U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$ BASE PER U_2.

$U_1 \cap U_2 = ?$

DOBBIAMO IMPORRE $\overbrace{}^{\text{PER UN } v \in \mathbb{R}^4}$ SIA L'APPARTENENZA A U_1 CHE A U_2, QUINDI?

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ PER ESSERE TALE CHE

$$v = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CIOÈ $v \in U_1$

MA ALTRESÌ VOGLIO CHE $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

in modo tale che $v \in U_2$ ANCHE!

DUNQUE, $(*)$ DIVENTA:

$$x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

OVVERO

$$\begin{cases} +x_2 + x_3 + \lambda_1 = 0 \\ x_2 - \lambda_2 = 0 \\ x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

RISOLVIAMOLO!

$$
\begin{array}{c}
\\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -2 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\Longleftrightarrow}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
-1 & -2 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\mathrm{IV}+\mathrm{I}}{\Longleftrightarrow}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & -2 & 2 & 2 & 0
\end{array}\right)
\underset{-2\,\mathrm{III}+\mathrm{IV}}{\Longleftrightarrow}
$$

$$
\Longleftrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\Longleftrightarrow}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\mathrm{II}\cdot(-1)
\underset{\mathrm{III}+\mathrm{IV},\ \text{poi}\ \mathrm{III}/2}{\Longleftrightarrow}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow
\begin{cases}
\lambda_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
\lambda_2 - x_2 = 0 \\
2x_3 = 0 \\
0 = 0
\end{cases}
\longrightarrow
\begin{cases}
\lambda_1 = -\lambda_2 \\
x_2 = \lambda_2 \\
x_3 = 0
\end{cases}
$$

QUINDI $\forall v \in U_1 \cap U_2$

DEVO AVERE CHE

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

CON $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

QUINDI AD ESEMPIO POSSO PRENDERE QUESTO

E SCRIVERE

$$v = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3}_{=0} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI UNA BASE DI $U_1 \cap U_2$ È

$$B_{U_1 \cap U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

N.B.: POTEVO ANCHE CONSIDERARE L'ALTRA DECOMPOSIZIONE DI v, OVVERO

$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ E IMPORRE $\lambda_1 = -\lambda_2$

ovvero

$$v = \cancel{\alpha_1}\,\cancel{\alpha_2}\,\lambda_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{\text{LA BASE È}}$$

TROVANDO LO STESSO RISULTATO!

• $U_1 + U_2 = ?$

UN SISTEMA DI GENERATORI PER $U_1 + U_2$ SI TROVA METTENDO INSIEME ~~QUELLI~~ UNA BASE DI U_1 CON UNA BASE DI U_2,

OVVERO

$$U_1 + U_2 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{BASE DI } U_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{BASE DI } U_2} \right\rangle$$

BISOGNA SOLO VERIFICARE SE LIN. INDIP.:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{II - I \\ III + I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow_{\substack{III+II \\ IV+II}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow_{\substack{\frac{1}{2}\cdot III \\ IV-III}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

HO 3 PIVOT, QUINDI TRA I 4 VETTORI SOLO 3 SONO LIN. INDIP., POSSO RIMUOVERNE UNO (SCELTA ARBITRARIA), UNA BASE DUNQUE DI $U_1 + U_2$ È

$$\mathcal{B}_{U_1+U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) PER IL TH. DI GRASSMANN:

$$\underbrace{\dim(U_1+U_2)}_{=3} = \underbrace{\dim(U_1)}_{=2} + \underbrace{\dim(U_2)}_{=2} - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{=1}$$

$$3 = 2+2-1 = 3 \quad \checkmark$$

③ (a)

V, W in somma diretta significa

che $V \cap W = \{\vec{0}\}$

Dunque, vediamo come è fatto $V \cap W$:

per capirlo impongo che il generico

$v \in V$ soddisfi anche eq cartesiane di W,

cioè $\forall v \in V$ vale:

$$\underset{V}{\overset{\cap}{v}} = t_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1+t_2\\2t_1+t_2\\3t_1+t_2\\4t_1+t_2\end{pmatrix}$$

impongo $v \in W$:

$$\begin{cases}(t_1+t_2)+(2t_1+t_2)=0\\(3t_1+t_2)+(4t_1+t_2)=0\end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}3t_1+2t_2=0 \to 2t_2=-3t_1\\7t_1+2t_2=0\end{cases} \to \begin{cases}2t_2=-3t_1\\t_1=0\end{cases}$$

$$\to \begin{cases}t_2=0\\t_1=0\end{cases}$$

Dunque $V \cap W = \{\vec{0}\}$.

(b) DOBBIAMO TROVARE $U \subset \mathbb{R}^4$ t.c.

$$V \oplus U = W \oplus U = \mathbb{R}^4$$

COME TROVIAMO U?

PRIMA TROVIAMO COME DEV'ESSERE $\dim U$, CHE INFATTI (PER GRASSMANN) DEV'ESSERE

$$\dim U = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{\substack{\shortparallel \\ 4}} - \dim V = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{\substack{\shortparallel \\ 4}} - \dim W$$

$\dim V = ?$ $\dim W$?

$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ MA ESSI SONO LIN. INDIP.

$\rightarrow \dim V = 2$

ALTRESÌ, $\dim W = 2$ POICHÉ

$\forall w \in W \rightarrow w = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} =$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LIN. INDIP.

QUINDI $\dim W = 2$

ALLORA $\dim U = 4 - 2 = 2$ ✓

ORA BASTA TROVARE DUE VETTORI u_1, u_2

t.c. $\{\underbrace{v_1, v_2}_{\uparrow}, u_1, u_2\}$ E $\{\underbrace{w_1, w_2}_{\uparrow}, u_1, u_2\}$

BASE DI V TROVATA PRIMA

BASE DI W TROVATA PRIMA

SIANO ENTRAMBI BASI DI $\mathbb{R}^4$,

COSICHÉ $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ ~~SAR~~ SODDISFÀ

LE CONDIZIONI RICHIESTE.

DUNQUE, DEVO TROVARE 8 NUMERI

$u_1 = (a, b, c, d)$, $u_2 = (e, f, g, h)$

t.c.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \quad E \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

ABBIAMO ENTRAMBE 4 PIVOTS

NELLA LORO FORMA A SCALA!

ANZICHÉ FARE UN CONTO "GENERICO", VALE LA PENA DI FARE DEI TENTATIVI SEMPLICI, AD ESEMPIO

$$a=c=d=0,\quad b=1,\quad e=f=g=0,\quad h=1$$

$$\to \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\Downarrow \; \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{4 PIVOT!}$$

INVECE A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{II-I}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{II+III}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 4 \text{ PIVOTS}$$

QUINDI

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

E t.c. $V \oplus U = W \oplus U = \mathbb{R}^4$.

---

④

(a) $U = \langle u_1, u_2 u_3 \rangle$, VERIFICHIAMO SE LIN. INDIP. AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2\alpha-3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2-\alpha & 3\alpha-4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{I \leftrightarrow II}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 2\alpha-3 \\ 1 & 2-\alpha & 3\alpha-4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\underset{\substack{II-\alpha\cdot I \\ III-I \\ IV-2I}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2-\alpha & 3(\alpha-2) \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\alpha II+III}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \longleftrightarrow \\ 2\text{IV} - \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

2 PIVOT

$\updownarrow$

2 VETTORI LIN. INDIP

TRA v_1, v_2, v_3

NE SCARTO UNO, AD ES. v_3 CHE È IL PIÙ BRUTTO $\rightarrow$ UNA BASE DI U È

$$B_U = \{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

DUNQUE, $\dim U = 2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(b)

RISOLVIAMO IL SISTEMA CHE DEFINISCE W:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_4 = 0 \\ (\alpha-1)x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha x_2 - x_4 \\ x_3 = (\alpha - 1)x_2 \end{cases}$$

DUNQUE

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha x_2 - x_4 \\ x_2 \\ (\alpha-1)x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha-1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha-1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= w_2} \right\rangle$$

QUINDI QUESTI VETTORI w_1, w_2 SONO GENERATORI PER W_α MA SONO LIN. INDIP. POICHÉ LA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

HA SEMPRE 2 PIVOT $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

QUINDI w_1, w_2 SONO LIN INDIP. !

QUINDI $\{w_1, w_2\} = \mathcal{B}_W$ BASE DI W

$\rightarrow \dim W = 2$

(c)

METODO 1:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} t \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha s + t \\ s \\ s + (2-\alpha)t \\ 2s + t \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ALLORA PER TROVARE $U \cap W$ BASTA IMPORRE L'APPARTENENZA A W, OVVERO

$$\cancel{x_1 = \alpha x_2} \quad \begin{cases} (\alpha s + t) - \alpha(s) + (2s+t) = 0 \\ (\alpha-1)s - s - (2-\alpha)t = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \cancel{\alpha s} + t - \cancel{\alpha s} + 2s + t = 0 \\ \alpha s - s - s - 2t + \alpha t = 0 \rightarrow (\alpha-2)t + (\alpha-2)s = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} 2s + 2t = 0 \rightarrow s = -t \\ (\alpha-2)t + (\alpha-2)s = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ USO $s=-t$

$$\begin{cases} s = -t \\ (\alpha-2)t - (\alpha-2)t = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

QUINDI $s = -t$

DA CUI:

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} =$$

USO U

USANDO $s=-t$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha t + t \\ -t \\ -t + (2-\alpha)t \\ -t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -1 \\ 1-\alpha \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

QUINDI $\dim(U \cap W) = 1$

METODO 2: CERCO LA FORMA CARTESIANA PER U E IMPONGO L'APPARTENENZA ANCHE A W

RISOLVENDO IL SISTEMA $\begin{cases} \text{EQUAZIONI PER } W \\ \text{EQUAZIONI PER } U \end{cases}$

DUNQUE: $\forall v \in U$

$$\downarrow$$

$$v = s \cdot a_1 + t\, a_2 = \begin{pmatrix} \alpha s + t \\ s \\ s + (2-\alpha)t \\ 2s + t \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \text{ CIOÈ}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha s + t \\ x_2 = s \\ x_3 = s + (2-\alpha)t \\ x_4 = 2s + t \end{cases} \rightarrow$$

VOGLIO "ELIMINARE" t, s ED AVERE ESPRESSIONI SOLO CON x_1, x_2, x_3, x_4 $\rightarrow$

$$\begin{cases} S = x_2 \\ x_1 = \alpha \cdot x_2 + t \\ x_3 = x_2 + (2-\alpha)t \\ x_4 = 2 \cdot x_2 + t \rightarrow t = x_4 - 2x_2 \end{cases}$$

in cui

$$\begin{cases} s = x_2 \\ t = x_4 - 2x_2 \\ x_1 = \alpha x_2 + x_4 - 2x_2 \\ x_3 = x_2 + (2-\alpha)(x_4 - 2x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - (\alpha-2)x_2 - x_4 = 0 \\ (-3+2\alpha)x_2 + (2-\alpha)x_4 - x_3 = 0 \end{cases}$$

DUNQUE, LE EQ. CARTESIANE PER U SONO

$$\begin{cases} x_1 + (2-\alpha)x_2 - x_4 = 0 \\ (2\alpha-3)x_2 + (2-\alpha)x_4 - x_3 = 0 \end{cases}$$

↓

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left\{ \begin{aligned} & x_1 - \alpha x_2 + x_4 = 0 \\ & (\alpha - 1) x_2 - x_3 = 0 \\ & x_1 + (2-\alpha) x_2 - x_4 = 0 \\ & (2\alpha - 3) x_2 - x_3 + (2-\alpha) x_4 = 0 \end{aligned} \right. \right\}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 2\alpha - 3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \; \mathrm{III} - \mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2\alpha - 3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \; \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

$$
= \xrightarrow{III - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right) II}
\begin{pmatrix}
1 & -\alpha & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-1 \\
0 & 2\alpha-3 & -1 & 2-\alpha
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{IV - \left(\frac{2\alpha-3}{2}\right) II}
\begin{pmatrix}
1 & -\alpha & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-1 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-1
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & -\alpha & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & \alpha-1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

[illegible] $\rightarrow$

$$
\begin{cases}
x_1 - \alpha x_2 + x_4 = 0 \\
2x_2 - 2x_4 = 0 \\
-x_3 + (\alpha-1)x_4 = 0 \\
0 = 0
\end{cases}
\rightarrow
$$

$\rightarrow x_2 = x_4$

$\downarrow$

$$\begin{cases} (\alpha-1)x_2 - x_3 = 0 \\ \underbrace{x_1 - \alpha x_2 + x_2}_{=\; x_1 + (1-\alpha)x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + (1-\alpha)x_2 = 0 \rightarrow x_1 = (\alpha-1)x_2 \\ x_3 = (\alpha-1)x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 1 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\rightarrow \dim(U \cap W) = 1$

(d) DA Grassmann:

$$\dim(U+W) = \underbrace{\dim U}_{=2} + \underbrace{\dim W}_{=2} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=1}$$

$\rightarrow \dim(U+W) = 3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(5)

Una funzione $f: V \to W$ è lineare se

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; \forall v_1, v_2 \in V$$

VERIFICHIAMOLO PER (a), (b), (c):

(a) $f_1(\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3)) =$

$$= f_1(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) =$$

$$\underset{\text{DEF. DI } f_1}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 - \lambda x_3 - \mu y_3 \\ 2\lambda x_1 + 2\mu y_1 - 3\lambda x_2 - 3\mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 - y_3) \\ \lambda(2x_1 - 3x_2) + \mu(2y_1 - 3y_2) \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 + y_2 - y_3 \\ 2y_1 - 3y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda f_1(x_1, x_2, x_3) + \mu f_1(y_1, y_2, y_3)$$

$\rightarrow f_1$ È LINEARE

(b)

SI PUÒ TENTARE DI FARE IL SEGUENTE RAGIONAMENTO MOSTRANDO CHE f_2 NON È LINEARE MA È PIÙ RAPIDO NOTARE CHE

$$f_2(0,0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } f_2}}{=} (0,0)$$

MA ALTRESÌ

$$f_2(0,0) = f_2\big((0,1)+(0,-1)\big)$$

MA $f_2(0,1) + f_2(0,-1) = (0,-1)+(0,-1) = (0,-2) \neq (0,0) = f_2(0,0)$

DUNQUE f_2 NON È LINEARE

(COME ATTESO SICCOME NELLA SUA DEF. APPARE UN QUADRATO!)

(c)

$$f_3(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \left(\int_1^2 (\lambda p(x) + \mu q(x))\, dx,\ (\lambda p(-1) + \mu q(-1))\right) =$$

$$= \left(\lambda \int_1^2 p(x)\, dx + \mu \int_1^2 q(x)\, dx,\ \lambda p(-1) + \mu q(-1)\right) =$$

$$= \lambda \left(\int_1^2 p(x)\, dx,\ p(-1)\right) + \mu \left(\int_1^2 q(x)\, dx,\ q(-1)\right) =$$

$$= \lambda f_3(p(x)) + \mu f_3(q(x))$$

$\to f_3$ È LINEARE