SOLUZIONI TUTORATO 3 (27/03/2024)

1. VEDI SOLUZIONI TUTORATO 2 DEL 13/03/2024

2. REMIND:

v_1, v_2, v_3 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

CONSIDERIAMO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ CHE EQUIVALE A:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OVVERO

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ RISOLVO

$$\begin{cases} 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_3 = 0 \\ \cancel{\alpha_1}\, 0 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

DUNQUE $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

OVVERO v_1, v_2, v_3 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI IN $\mathbb{R}^3$

DOMANDA: $\{v_1, v_2, v_3\}$ SONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$?

SI, POICHÉ HO UN NUMERO DI ~~3~~ VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI PARI ALLA DIMENSIONE DELLO SPAZIO IN ESAME CHE ESSENDO $\mathbb{R}^3$ HA DIMENSIONE 3.

$\rightarrow$ QUINDI $\{v_1, v_2, v_3\}$ BASE DI $\mathbb{R}^3$

~~PER CONVINCERSI~~ DI CIÒ

QUESTO VALE SOLTANTO PERCHÉ HO $\underline{\underline{3}}$ VETTORI LIN. INDIP. IN $\mathbb{R}^3$

E SI GENERALIZZA PER m VETTORI LIN. INDIP. IN V CON $\dim V = m$.
(V SPAZIO VETT. QUALSIASI CON QUESTO VINCOLO SULLA SUA DIMENSIONE!).

PER ESSERE PIÙ ESPLICITI (ANCHE SE NON SERVE QUI) VERIFICHIAMO CHE v_1, v_2, v_3 SONO UN INSIEME DI GENERATORI PER $\mathbb{R}^3$, OVVERO CHE $\forall\, v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ POSSO SCRIVERE

~~AS~~ v COME COMBINAZIONE LINEARE DI v_1, v_2, v_3:

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + \lambda_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

CHE EQUIVALE A

$$\begin{cases} a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ b = \lambda_1 + \lambda_2 \\ c = \lambda_1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ RIESCO A RISOLVERLO TROVANDO UNIVOCAMENTE $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$? ↓

SÌ! INFATTI:

$$\begin{cases} (I) & a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ (II) & b = \lambda_1 + \lambda_2 \rightarrow b = c + \lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = b - c \\ (III) & \lambda_1 = c \end{cases}$$

LA (I) DIVENTA: $a = \underbrace{\lambda_1}_{= c} + \underbrace{\lambda_2}_{= b-c} + \lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = a - b$

DUNQUE $\forall v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ ($\leftarrow$ i vettori v_1, v_2, v_3 definiti nel testo!)

DOVE $\begin{cases} \lambda_1 = c \\ \lambda_2 = b - c \\ \lambda_3 = a - b \end{cases} \longrightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ GENERATORI DI $\mathbb{R}^3$ ED ESSENDO LIN. INDIP. SONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$ $\square$

~~N.B.~~

N.B. (IMPORTANTE):

QUESTO CI MOSTRA COME UNO STESSO VETTORE v POSSA ESSERE RAPPRESENTATO IN MODO DIVERSO (SENZA CAMBIARE):

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_C \overset{\text{ovvero}}{=} a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ RISPETTO ALLA BASE CANONICA $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ DI $\mathbb{R}^3$

MA ALTRESÌ LO STESSO v POSSO ~~[illegible]~~ DECOMPORLO IN UN ALTRA BASE ~~[illegible]~~ DI $\mathbb{R}^3$ (VI SONO ∞ BASI POSSIBILI!), AD ESEMPIO PROPRIO USANDO $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

COME

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix}_B \overset{\text{ovvero}}{=} c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

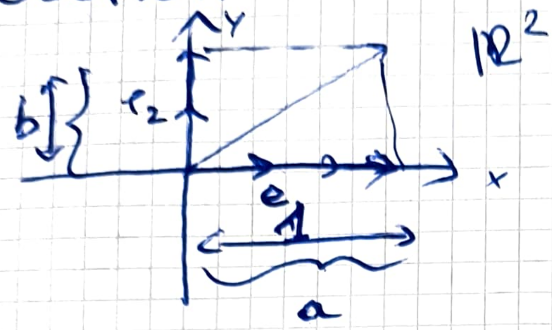
VEDRETE PIÙ AVANTI NEL CORSO UN MODO PER PASSARE DA UNA RAPPRESENTAZIONE v (SCRITTO IN UNA BASE B_1) AD UNA ~~[illegible]~~ RAPPRESENTAZIONE DELLO STESSO v ~~[illegible]~~ (MA SCRITTO IN UNA BASE ~~[illegible]~~ B_2) ~~[illegible]~~:

~~[illegible]~~. CIÒ SI PUÒ FARE CON LA "MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE" (LO VEDRETE...)

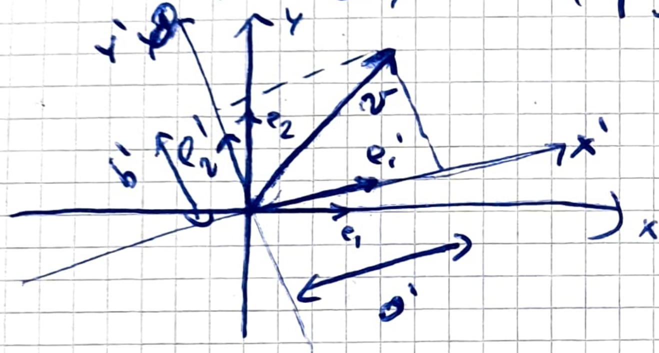
IDEA NAIVE:

DATO UN VETTORE $v \in \mathbb{R}^2$ POTETE SCRIVERLO COME $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_2} = ae_1 + be_2$

OVVERO GEOMETRICAMENTE



OPPURE POTETE CAMBIARE BASE, AD ESEMPIO RUOTANDO $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ DI UN CERTO ANGOLO



COSÌ FACENDO POTETE NOTARE CHE LO STESSO v HA COORDINATE $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ NELLA BASE $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ DI $\mathbb{R}^2$ MENTRE HA COORDINATE $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ NELLA BASE RUOTATA $\{e_1', e_2'\}$ DI $\mathbb{R}^2$.

③

(a) TROVIAMO UNA BASE B DI V:

PER DEFINIZIONE V È GENERATO DA v_1, v_2, v_3, QUINDI v_1, v_2, v_3 SONO GENERATORI DI V

BASTA DUNQUE VERIFICARE SE SONO LIN. INDIP. O MENO, OVVERO

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \ ?$$

VEDIAMO:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{RISOLVIAMO}} \begin{cases} -2\alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 = 0 \quad 0 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_3 = 0 \to \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases}$$

DUNQUE: $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3$

OVVERO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$\Downarrow$ IMPLICA

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_1 v_2 - \alpha_1 v_3 = 0$$

MA α_1 PUÒ ESSERE QUALSIASI (NON È NECESSARIAMENTE ZERO!)

DUNQUE v_1, v_2, v_3 SONO LINEARMENTE DIPENDENTI!

PER TROVARE UNA BASE B DI V, DOBBIAMO RIDURRE I VETTORI CONSIDERATI E A PRIORI ABBIAMO 3 OPZIONI:

$\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$ $\rightarrow$

PROVIAMO CON $\{v_1, v_2\}$:

SONO LIN. INDIP.?

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \to \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

SI! $\to$ DUNQUE UNA BASE DI V È

$$B = \{v_1, v_2\}$$ E

$$\dim V = 2.$$

(b)

PER COMPLETARE B AD UNA BASE B' DI $\mathbb{R}^4$ DOBBIAMO TROVARE DUE VETTORI u_1, u_2 t.c.

$$\mathbb{R}^4 = \langle \{u_1, u_2, v_1, v_2\} \rangle$$

I VETTORI $u_1, u_2 \notin W$ (ALTRIMENTI <u>NON</u> POTREI GENERARE TUTTO $\mathbb{R}^4$)

E DEVONO ESSERE LIN. INDIP.;

(1) $u_1, u_2 \notin W$ SIGNIFICA

$$u_1, u_2 \notin \text{Span}\{v_1, v_2\}$$

$$\shortparallel$$

$$\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\shortparallel$$

$$\left\{\alpha_1 \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\shortparallel$$

$$\left\{\begin{pmatrix}2\alpha_1 + \alpha_2\\ \alpha_1 + 2\alpha_2\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

DUNQUE u_1, u_2 NON DEVONO AVERE QUESTA FORMA,

AD ESEMPIO

$$u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

E SONO ANCHE LIN. INDIP. A VISTA ("PUNTANO IN DIREZIONI DIVERSE IN $\mathbb{R}^4$")

INFATTI, CON u_1

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \nexists \text{ SOL}$$

PER u_2:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \nexists \text{ SOL.}$$

$$B' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ v_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ u_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ u_2}} \right\}$$

BASE DI $\mathbb{R}^4$.

(C) PER TROVARE LE COORDINATE DI v_4 NELLA BASE B' DEVO SCRIVERE v_4 COME COMB. LINEARE DI v_1, v_2, u_1, u_2, OVVERO

$$\underbrace{v_4}_{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \alpha_1 \underbrace{v_1}_{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} + \alpha_2 \underbrace{v_2}_{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} + \alpha_3 \underbrace{u_1}_{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} + \alpha_4 \underbrace{u_2}_{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

CIOÈ:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

RISOLVO

$$\begin{cases} 2(1-\alpha_3) = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \to \alpha_1 = 1-\alpha_3 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 = -1 - \alpha_3$$

$\downarrow$

LA (I) DIVENTA

$$2(-1-\alpha_3) + (\underbrace{\alpha_2}_{=1}) = 0$$

$\downarrow$

$$-2\alpha_3 = 1 \leftarrow -2 - 2\alpha_3 + 1 = 0$$

$\downarrow$

$$\alpha_3 = -1/2$$

QUINDI

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1/2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1/2 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$v_4 = \left(-1/2\right) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot v_3$$

OVVERO

$$v_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

(4)

(a) $\forall A \in M$ è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Dunque

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= e_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= e_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= e_3} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= e_4}$$

$\downarrow$ dunque

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dei generatori di M, inoltre sono una base poiché lin. indip.: non serve nessuna verifica esplicita, infatti e_1, e_2, e_3, e_4 "puntano in direzioni diverse" e non possono essere lin. dipendenti!

(b)

SIA $S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

~~Ogni~~ OGNI MATRICE DI S POSSO SCRIVERLA

IN MODO UNICO COME

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= E_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= E_3}$$

DUNQUE

$\{E_1, E_2, E_3\}$ BASE DI S, INFATTI

SONO GENERATORI DI S (COME ABBIAMO

APPENA DIMOSTRATO) E SONO LIN. INDIP.

LA LIN. INDIP SI PUÒ VERIFICARE ESPLICITAMENTE

MA POSSIAMO USARE IL DISCORSO "NAIVE"

DELLE DIREZIONI, INFATTI:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"PUNTANO IN DIREZIONI ~~...~~ DIVERSE"

$\Downarrow$

$\to$ LIN. INDIP.!

~~Oli~~

$\Rightarrow \dim S = 3.$

(5)

(a)

(1) MOSTRIAMO CHE $\{p_1, p_2, p_3\}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V

$$\forall \underbrace{p(x)}_{a+bx+cx^2} \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

POSSO SCRIVERE $\underbrace{a+bx+cx^2}_{p(x)} \overset{?}{=} \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$?

VERIFICHIAMO:

$$a+bx+cx^2 = \underbrace{\lambda_1(x^2+x+1) + \lambda_2(x^2+x) + \lambda_3(x+1)}_{(\lambda_1+\lambda_2)x^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x + (\lambda_1+\lambda_3)}$$

OVVERO
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

$\downarrow$ RISOLVO PER $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 = c - \lambda_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a - \lambda_2 = c - \lambda_3 \\ \lambda_1 = c - \lambda_3 \\ a - \cancel{\lambda_2} + \cancel{\lambda_2} + \lambda_3 = b \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} a-\lambda_2 = c-\lambda_3 \\ \lambda_1 = c-\lambda_3 \\ a+\lambda_3 = b \rightarrow \lambda_3 = b-a \end{cases}$$

DA CUI

$\lambda_1 = c-(b-a) = c-b+a$

E

$a-\lambda_2 = \underbrace{c-(b-a)}_{c-b+a}$

$\lambda_2 = b-c$

DUNQUE:
$$\begin{cases} \lambda_1 = a-b+c \\ \lambda_2 = b-c \\ \lambda_3 = b-a \end{cases}$$

$\rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ GENERATORI PER V

(2) MOSTRIAMO SE $\{p_1, p_2, p_3\}$ ~~BASE~~ LINEARMENTE IND DI P.

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

POSSIAMO USARE 2 MODI

1. CALCOLO DIRETTO
2. USARE UNA RELAZIONE NOTA

① CALCOLO DIRETTO

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1(x^2+x+1) + \lambda_2(x^2+x) + \lambda_3(x+1) = 0$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)x^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x + (\lambda_1+\lambda_3) = 0$$

OVVERO

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

MA NOI ABBIAMO GIÀ RISOLTO QUESTO SISTEMA PRIMA, INFATTI PRIMA AVEVAMO RISOLTO

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_3 = c \end{cases}$$

DUNQUE PRENDIAMO LE SOLUZIONI TROVATE PRIMA PONENDO $a=b=c=0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \{p_1, p_2, p_3\} \\ \text{LIN. INDIP.} \end{matrix}$$

② SPESSO QUANDO SI LAVORA CON SPAZI VETTORIALI DI POLINOMI, MATRICI, FUNZIONI, etc È OPPORTUNO RICONDURSI AL CASO SEMPLICE DI ~~[illegible]~~ $\mathbb{R}^n$: LO SPAZIO VETTORIALE PIÙ SEMPLICE CHE CI SIA! :)

UN TEOREMA CI ASSICURA CIÒ, IN PARTICOLARE

OGNI SPAZIO VETTORIALE V (REALE) CON $\dim V = n < \infty$ È IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON $\mathbb{R}^n$

E SCRIVEREMO CHE

$$V \underset{\uparrow}{\cong} \mathbb{R}^n$$

"ISOMORFO A"

AD ESEMPIO (VEDI ES. 7 TUTORATO 2):

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

NEL NOSTRO CASO VOGLIAMO APPLICARE CIÒ PER UNO SPAZIO DI POLINOMI, IN PARTICOLARE:

$$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$a + bx + cx^2$$

QUANTO VALE n? DEV'ESSERE PARI ALLA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ CHE È 3, POICHÉ $\forall p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ POSSO SCRIVERE $p(x) = a + bx + cx^2$ IN MANIERA UNICA E DUNQUE $\{1, x, x^2\}$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Allora io potrei prendere

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\le 2}[x] & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ a+bx+cx^2 & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}$$

(a,b,c) identificano univocamente un polinomio $a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_{\le 2}[x]$ ma anche un vettore

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$!!!

~~Dunque, l'esercizio diventa il seguente:~~

Dunque posso usare la corrispondenza sopra e scrivere che

$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$ con $p_1 = x^2+x+1$, $p_2 = x^2+x$, $p_3 = x+1$

$\Updownarrow$ se e solo se

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

è lo stesso sistema trovato col metodo 1, dunque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

(b) $q_1 = x$, $q_2 = x^2 + 3x + 1$, $q_3 = -2x^2 - 6x - 2$

COME COMB. LINEARE DI p_1, p_2, p_3 ?

PER q_1:

USO DEF. DI p_1, p_2, p_3

$$q_1 = x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_3)$$

OVVERO

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

RISOLVENDO, SI TROVA:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{x = -p_1 + p_2 + p_3} \leftarrow$$

PER q_2:

$$q_2 = x^2 + 3x + 1 = (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_3)$$

OVVERO

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

~~SOLUZIONE~~ RISOLVENDO SI TROVA

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{q_2 = -1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3}$$

~~ANALOGAMENTE PER q_3 SI TROVA $\alpha_1 =$~~

ANALOGAMENTE PER q_3 SI PUÒ

FARE LO STESSO, CIOÈ

$$q_3 = -2x^2 - 6x - 2 = (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_3)$$

E

RISOLVENDO

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

SI TROVA
$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = -4 \end{cases}$$

CIOÈ
$$\boxed{q_3 = 2p_1 - 4p_2 - 4p_3}$$

(c) PER TROVARE UNA BASE $\mathcal{B}$ DI

$\mathrm{span}(q_1, q_2, q_3)$, NOTIAMO CHE

$$\underbrace{q_3}_{-2x^2-6x-2} = -2q_2 = \underbrace{-2(x^2+3x+1)}_{-2x^2-6x-2}$$

DUNQUE q_3, q_2 LIN. DIPENDENTI !

SCELGO UNO DEI DUE (AD ES. q_2) E NOTO

CHE $\{q_1, q_2\}$ INVECE SONO LIN. INDIP., INFATTI

$\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $q_1 = \lambda q_2$

(CHE È LA STESSA COSA DI CHIEDERE CHE $\underline{\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = 0}$ QUANDO SI HANNO 2 VETTORI)

INFATTI: $\begin{cases} q_1 = x \\ \lambda q_2 = \lambda(x^2+3x+1) = \lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda \end{cases}$

$\downarrow$

SE UN $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $q_1 = \lambda q_2$ SAREBBE tale che

$$x = \lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda$$

OVVERO

$\left.\begin{cases} \lambda = 0 \\ 3\lambda = 1 \to \lambda = 1/3 \\ \lambda = 0 \end{cases}\right\}$ IMPOSSIBILE POICHÉ $1/3 \neq 0$

$\to$ CONCLUDIAMO CHE $B = \{q_1, q_2\}$

È UNA BASE DI $\mathrm{Span}\{q_1, q_2, q_3\}$

PER ESTENDERLA AD UNA BASE PER V DEVO CONSIDERARE UN $\tilde{q}$ t.c.

$\mathrm{Span}\{q_1, q_2, q_3\} = V$.

UN ESEMPIO È DATO DA $q_3 = x^2$

INFATTI

$$\{q_1, q_2, q_3\} = \{x,\ x^2+3x+1,\ x^2\}$$

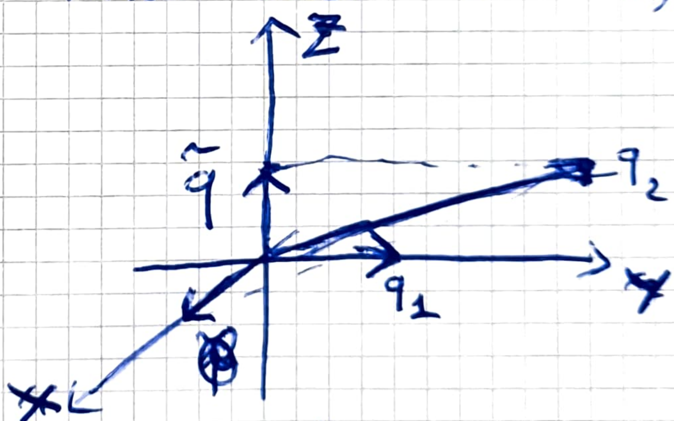
3 VETTORI LIN. INDIP. DI $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

SI PUÒ VERIFICARE ESPLICITAMENTE, MA L'INTUITO CI SUGGERISCE DI PASSARE AD $\mathbb{R}^3$ (DOVE TUTTO È PIÙ CHIARO):

$q_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$q_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ RAPPRESENTIAMOLI IN $\mathbb{R}^3$ (RISPETTO ALLA BASE CANONICA):

$\tilde{q} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



SONO VISIVAMENTE LIN. INDIP. !!!

$$\{x,\ x^2+3x+1,\ x^2\}$$

BASE DI $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.