SOLUZIONI (ESERCIZI 2 - 13/03/2024)

ES. 1

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} m & m-1 & m+2 \\ m+1 & -m & 5m+3 \end{array}\right)$$

~~CASO 1 $m=0$~~

CASO 1: $m=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 = 2 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

CASO 2: $m \neq 0$ (ORA POSSO DIVIDERE PER m)

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} m & m-1 & m+2 \\ m+1 & -m & 5m+3 \end{array}\right) \underset{\text{I}/m}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{m-1}{m} & \frac{m+2}{m} \\ m+1 & -m & 5m+3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\underset{\text{II}-\text{I}\cdot(m+1)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{m-1}{m} & \frac{m+2}{m} \\ 0 & -m-(m+1)\frac{(m-1)}{m} & 5m+3-\frac{(m+1)(m+2)}{m} \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$-m-(m+1)\frac{(m-1)}{m} = -m-\frac{(m^2-1)}{m} = \frac{1-2m^2}{m}$$

$$5m+3-\frac{(m+1)(m+2)}{m} = \frac{5m^2+3m-m^2-2m-m-2}{m} = \frac{4m^2-2}{m}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{m-1}{m} & \frac{m+2}{m} \\ 0 & \frac{1-2m^2}{m} & \frac{4m^2-2}{m} \end{array}\right)$$

CASO 2.1 : $\frac{1-2m^2}{m} = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

EQUIVALE AD AVERE

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{m-1}{m} & \frac{m+2}{m} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

OVVERO

$$\begin{cases} x + \frac{m-1}{m} \cdot y = \frac{m+2}{m} \\ 0x + 0y = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ QUESTA EQ. NON FISSA NULLA!

$$x + \frac{m-1}{m} y = \frac{m+2}{m} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-m}{m} y + \frac{m+2}{m} \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\rightarrow \infty \text{ SOLUZIONI})$$

CASO 2.2: $m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{m-1}{m} & \frac{m+2}{m} \\ 0 & \frac{1-2m^2}{m} & \frac{4m^2-2}{m} \end{array}\right)$$

$\updownarrow$

$$\begin{cases} x + \frac{m-1}{m} y = \frac{m+2}{m} \\ y\left(\frac{1-2m^2}{m}\right) = \frac{4m^2-2}{m} \end{cases} \longrightarrow y = \frac{4m^2-2}{1-2m^2} = \frac{2(2m^2-1)}{1-2m^2} = -2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{m+2}{m} - \frac{m-1}{m} y = \frac{m+2}{m} - 2\left(\frac{1-m}{m}\right) = \frac{m+2-2+2m}{m} = \frac{3m}{m} = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

ES. 2

(a) $S := \{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$

PER VERIFICARE CHE S SIA UN SOTTOSP. VETT. DI $\mathbb{R}^3$ DOBBIAMO VERIFICARE 3 PROPRIETÀ:

(1) $\vec{0} \in S$? CON $\vec{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

$0 + 0 + 0 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow$ VERO!

DUNQUE $\vec{0} \in S$ (i.e. $S \neq \emptyset$).

(2) SIANO

$u = (x_1, x_2, x_3) \in S \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$v = (y_1, y_2, y_3) \in S \rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$

CON $\underset{i=1,2,3}{x_i \in \mathbb{R}}$, $\underset{i=1,2,3}{y_i \in \mathbb{R}}$

$u + v \in S$? SI, POICHÉ

PER DEF. DI SOMMA IN $\mathbb{R}^3$

$u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) =$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$

INOLTRE $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) =$

$= \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\substack{\shortparallel \leftarrow u \in S \\ 0}} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{\substack{\shortparallel \leftarrow v \in S \\ 0}} = 0 + 0 = 0$

PER PROPRIETÀ ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA DI + IN $\mathbb{R}^3$

$\rightarrow u + v \in S \quad (\forall u \in S, \forall v \in S)$

(3) $\forall u \in S$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$ VALE CHE $\lambda u \in S$?

$u = (x_1, x_2, x_3)$

$\downarrow$

SI, POICHÉ $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) \underset{\uparrow}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in \mathbb{R}^3$

PER DEF. DI PRODOTTO SCALARE PER VETTORE IN $\mathbb{R}^n$ (CON $n=3$ QUA!)

INOLTRE $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 \underset{\uparrow}{=} \lambda(\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{\overset{\leftarrow u \in S}{=0}}) = \lambda \cdot 0 = 0$

PER PROPR. DISTRIBUTIVA

$\rightarrow$ QUINDI, $\lambda u \in S$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in S)$.

N.B.: IL PUNTO (2) E (3) POTEVANO ESSERE SVOLTI PIÙ VELOCEMENTE INSIEME, INFATTI BASTA VERIFICARE CHE $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \underset{(x_1, x_2, x_3)}{u} \in S$, $\forall \underset{(y_1, y_2, y_3)}{v} \in S$

VALGA CHE ~~$\lambda_1 x_1 + \lambda_2$~~ $\lambda_1 u + \lambda_2 v \in S$:

CIÒ VALE POICHÉ $\lambda_1 u + \lambda_2 v = \lambda_1 (x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 (y_1, y_2, y_3) =$

$= (\lambda_1 x_1, \lambda_1 x_2, \lambda_1 x_3) + (\lambda_2 y_1, \lambda_2 y_2, \lambda_2 y_3) =$

$= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1, \lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3) \in \mathbb{R}^3$

DOVE $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1) + (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3) =$

$= \lambda_1 (\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{\overset{\leftarrow u \in S}{=0}}) + \lambda_2 (\underbrace{y_1 + y_2 + y_3}_{\overset{\leftarrow v \in S}{=0}}) =$

$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 0 = 0 + 0 = 0$ ✓

(b) $S := \{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = a, \ a \in \mathbb{R} \}$

RIPETENDO LA STESSA PROCEDURA, NOTIAMO CHE IL PUNTO (1) VALE SOLO PER $a = 0$, INFATTI $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ AVREI $0 + 0 + 0 = a \neq 0$ $\rightarrow$ $\vec{0} \notin S$ $\rightarrow$ S NO SOTTOSP. VETT.

N.B.:

PIÙ AVANTI NEL CORSO SI STUDIERANNO GLI SPAZI AFFINI (PER GENERALIZZARE GLI SPAZI VETTORIALI) E SI CAPIRÀ CHE S CON $a \in \mathbb{R}$ È UNO SPAZIO AFFINE

ES. 3:

(a) $\mathbb{R}^3$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ RISPETTO ALLE OPERAZIONI

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \underset{(x_1,x_2,x_3)}{v}, \underset{(y_1,y_2,y_3)}{u}) \longmapsto v+u = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (\lambda, \underset{(x_1,x_2,x_3)}{v}) \mapsto \underset{(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)}{\lambda x}$$

DOVE $\mathbb{R}^3 := \{ v = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3 \}$

DUNQUE, • $\overline{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (PER COSTRUZIONE, $0 \in \mathbb{R}$)

• $\lambda v + \mu \cdot u \in \mathbb{R}^3$, INFATTI $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v, u \in \mathbb{R}^3$

$$\lambda v + \mu \cdot u = \lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= (\underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\lambda x_3 + \mu y_3}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^3$$

N.B.:

PER ESSERE PIÙ PRECISI ORA SI DOVREBBE ANCHE MOSTRARE CHE VALGONO "PROPRIETÀ SECONDARIE" COME PROPRIETÀ ASSOCIATIVA PER LA SOMMA $+$, $\exists$ ELEMENTO NEUTRO RISPETTO A $+$, ESISTE L'OPPOSTO DI OGNI ELEMENTO DI $\mathbb{R}^3$, LA SOMMA È COMMUTATIVA, VALE L'OMOGENEITÀ PER PRODOTTO, ESISTE L'ELEMENTO NEUTRO RISPETTO AL PRODOTTO, PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA PER PRODOTTO RISPETTO A $+$, PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA TRA SCALARI

MA NON DIMOSTREREMO CIÒ

(SI PUÒ FARE E OGNUNA DELLE PROPRIETÀ ELENCATE VALE)

→ DUNQUE $\mathbb{R}^3$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU CAMPO $\mathbb{R}$.

(b) IN QUESTO PUNTO SI VUOLE SEMPLICEMENTE MOSTRARE CHE È POSSIBILE COSTRUIRE UN INSIEME I DOVE ~~VALGONO~~ VALE CHE

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \forall v, u \in I \rightarrow \lambda_1 v + \lambda_2 u \in I$

MA QUESTO NON ASSICURA LA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE POICHÉ (ALMENO) UNA DELLE 8 PROPRIETÀ DI DEFINIZIONE ~~DETTA~~ (QUELLE ENUNCIATE NEL "N.B." DEL PUNTO PRECEDENTE) POTREBBE NON VALERE.

PRENDIAMO DUNQUE $I = \mathbb{R}^3$ E LE OPERAZIONI SU $\mathbb{R}^3$ $+, \cdot$ DEFINITE COME

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0)$$

NEL NOSTRO CASO:
NON VALE L'ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO RISPETTO AL PRODOTTO POICHÉ

$$\forall v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow 1 \cdot (x_1, x_2, x_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER DEF.} \\ \text{DI "·"} \\ \text{QUA!}}}{=} (1x_1, 1x_2, 0) \neq (x_1, x_2, x_3)$$

→ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ <u>NON</u> È UNO SPAZIO VETT. SU $\mathbb{R}$

BISOGNA INFATTI USARE ALTRE DEF. PER $+, \cdot$ (QUELLE STANDARD, USATE NEL PUNTO (a)) PER AVERE CHE $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ SIA UNO SPAZIO VETT. SU $\mathbb{R}$.

ES. 4

SIANO $A, B \in S$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \in S$$

SIA $A \in S, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ 0 & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \in S$$

$\rightarrow$ S È UN SOTTOSP. VETT. DI $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

ES. 5 :

(a) ~~[illegible]~~ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in S$

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{\text{per def.}}{=} \lambda f(x) + \mu g(x)$$

DUNQUE $\lambda f + \mu g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, OVVERO $\lambda f + \mu g \in S$

(b) $A := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int dx\, [f(x)]^2 < \infty \right\}$

(1) SIA $f = 0$ (FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA),

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, (f)^2 = \int_{\mathbb{R}} dx\, (0)^2 = \int_{\mathbb{R}} dx\, 0 = 0 < \infty$$

$\rightarrow (f=0) \in A$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in A \rightarrow \lambda f \in A$?

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, [\lambda f(x)]^2 = \lambda^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx\, [f(x)]^2}_{< \infty \text{ poiché } f \in A} < \infty \rightarrow \lambda f \in A$$

13) $\forall f \in A, \forall g \in A$, $f+g \in A$?

$$\cancel{\int dx\, |f_{n}+g_{n}|^2} = \int_{\mathbb{R}} dx\, \left(f(x)+g(x)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} dx \left[(f(x))^2 + (g(x))^2 + 2 f(x)\, g(x)\right] =$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx\, (f(x))^2}_{<\infty \,\uparrow\, f\in A} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx\, (g(x))^2}_{<\infty \,\uparrow\, g\in A} + 2\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\, g(x)$$

~~SAPENDO CHE LA~~

USANDO LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

$$\cancel{\left|\int dx\, f(x)\right|^2 \leq \int dx\, |f(x)|^2} \quad \left|\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\, g(x)\right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx\right)$$

DUNQUE

$$2\int dx\, f(x)\, g(x) < \infty \,,$$ POICHÉ:

$$\left|2\int dx\, f(x)\, g(x)\right|^2 \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)}_{<\infty \,\uparrow\, f\in A} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx\right)}_{<\infty \,\uparrow\, g\in A}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} dx\, [f(x)+g(x)]^2 < \infty$$

DUNQUE, A È UN SOTTOSP. VETTORIALE DI $\mathcal{S}$

ES. 6

(a)

$$\mathbb{R}_{\leq n}[x] := \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, n \}$$

(1) $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$

$$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) =$$

$$= \underbrace{(a_0 + b_0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\in \mathbb{R}} x + \dots + \underbrace{(a_n + b_n)}_{\in \mathbb{R}} x^n \in \mathbb{R}_{\leq n}(x)$$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall p(x) \in \mathbb{R}_{\leq n}(x)$

$$\lambda p(x) = \lambda (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \underbrace{(\lambda a_0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\lambda a_1)}_{\in \mathbb{R}} x + \dots + \underbrace{(\lambda a_n)}_{\in \mathbb{R}} x^n \in \mathbb{R}_{\leq n}[x]$$

$\rightarrow \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

$\uparrow$

AL NETTO DEL DOVER DIMOSTRARE LE 8 PROPRIETÀ AGGIUNTIVE (SI PUÒ FARE E VALGONO!)

(b) DUE SOTTOSP. VETTORIALI DI $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ LI POSSO OTTENERE (AD ESEMPIO) METTENDO A ZERO DEI COEFFICIENTI, OVVERO AD ESEMPIO

$$A = \{ p(x) = a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}_{\leq n}[x]$$

$$A = \mathbb{R}_1[x]$$

$$B := \{ p(x) = a_1 x + a_2 x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}_{\leq n}[x]$$

INFATTI:

"A" SOTTOSP. VETT. POICHÉ

- $\vec{0} \in A$ $(p(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{0} + \underset{\in \mathbb{R}}{0} x = 0)$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\forall p(x), q(x) \in A$

ALLORA $\lambda p(x) + \mu q(x) =$

$= \lambda (a_0 + a_1 x) + \mu (b_0 + b_1 x) =$

$= (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \lambda b_1) \cdot x$

PROCEDIMENTO NON NECESSARIO: BASTA USARE IL PUNTO (2) PONENDO $n = 1$

"B" SOTTOSP. VETT. POICHÉ

- $\vec{0} \in B$ $(p(x) = 0x + 0x^2 = 0)$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall p(x), q(x) \in B$

ALLORA $\lambda p(x) + \mu q(x) =$

$= \lambda (a_1 x + a_2 x^2) +$

$+ \mu (b_1 x + b_2 x^2) =$

$= (\lambda a_1 + \mu b_1) x + (\lambda a_2 + \mu b_2) x^2$

ES. 7:

$$f: M_{n,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

f è invertibile poiché iniettiva e suriettiva, per vedere ciò possiamo considerare il caso semplice in cui $n = m = 2$, ovvero

$$f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

1) f suriettiva, poiché ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ è del tipo $\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ed è associabile ad una matrice

con le stesse entrate, ad es. proprio $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(2) f INIETTIVA i.e. $f(M) = f(N) \rightarrow M = N$

INFATTI

$$\underbrace{f(M)}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \underbrace{f(N)}_{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{pmatrix}$$

MA QUESTO SIGNIFICA ("TORNANDO INDIETRO"), OVVERO ASSOCIANDO A QUESTI VETTORI LE PROPRIE MATRICI)

CHE $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{= M} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}}_{= N}$

OVVIAMENTE ERA OVVIO: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$

IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON