SOLUZIONI - TUTORATO 12 (04/06/2024)

(1)

RECAP:

PER DISCUTERE ESISTENZA E/O UNICITÀ DI UNA APPLICAZIONE LINEARE $\phi: V \to W$ DEFINITA A PARTIRE DA $\phi(v_1) = w_1, \dots, \phi(v_m) = w_m$ USIAMO IL TEOREMA SEGUENTE:

TEOREMA:

- SE $\{v_1, \dots, v_m\}$ BASE DI V (DOMINIO DI ϕ), ALLORA ϕ ESISTE ED È UNICA
- SE $\{v_1, \dots, v_m\}$ NON È UNA BASE DI V, CI SONO VARI CASI POSSIBILI:

  (1) SE $\{v_1, \dots, v_m\}$ LIN. INDIP., ALLORA ϕ ESISTE MA NON È UNICA

  (2) SE $\{v_1, \dots, v_m\}$ LIN. DIP. E NON SONO GENERATORI DI V, ALLORA ϕ PUÒ NON ESISTERE OPPURE ESISTERE MA NON ESSERE UNICA.

  (3) SE $\{v_1, \dots, v_m\}$ LIN. DIP. E SONO GENERATORI DI V, ALLORA ϕ PUÒ NON ESISTERE OPPURE ESISTERE ED ESSERE UNICA

NEL CASO (2) E (3) VANNO FATTE VERIFICHE SPECIFICHE DI CONSISTENZA DI LINEARITÀ E DELLA DEFINIZIONE DI ϕ

TORNIAMO ALL'ESERCIZIO:

PER USARE IL PRECEDENTE TEOREMA ABBIAMO BISOGNO DI SCRIVERE <u>TUTTE</u> LE CONDIZIONI SU ϕ, TRAMITE $\phi(v_1)=w_1, \dots, \phi(v_m)=w_m$.

IN EFFETTI ALCUNE SONO GIÀ "SCRITTE BENE", COME AD ESEMPIO

$$\phi(1,-1,1,-1)=(2,1)$$
$$\phi(1,0,-1,0)=(-2,-k)$$
$$\phi(0,0,1,1)=(1,k)$$

MA LA CONDIZIONE $\ker\phi = U$ VA RISCRITTA.

PER FARLO, TROVIAMO UNA BASE DI U:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \rightarrow w=-x-y-z \\ 2x+3y-z+w=0 \end{cases}$$

QUINDI:
$$\begin{cases} w=-x-y-z \\ 2x+3y-z+(-x-y-z)=0 \rightarrow x+2y-2z=0 \end{cases}$$

DA CUI
$$\begin{cases} w=-x-y-z \rightarrow w=-2z+2y-y-z = y-3z \\ x=2z-2y \end{cases}$$

QUINDI $\begin{cases} w = y - 3z \\ x = 2z - 2y \end{cases}$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in U \iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-2y \\ y \\ z \\ y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y.$$

DUNQUE, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

CHE SONO LIN. INDIP. POICHÉ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[II+I]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

QUINDI, UNA BASE DI U È $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

LA CONDIZIONE $\ker \phi = U$ DIVENTA

$$\phi\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IN CONCLUSIONE,

IN QUESTO CASO ϕ È DEFINITA DA

$$\phi\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=v_4}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \phi\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=v_2}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\phi\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-3\end{pmatrix}}_{=v_5}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \phi\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{=v_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\phi\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{=v_3}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

L'INSIEME $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ È COMPOSTO DA 5 VETTORI IN $\mathbb{R}^4$ E DUNQUE <u>NON</u> POSSONO ESSERE LIN. INDIP.! $\longrightarrow$ CASO (2) O (3) DAL TEOREMA!

PER CAPIRE SE SONO O MENO GENERATORI DI $\mathbb{R}^4$, CAPIAMO LE LORO RELAZIONI DI DIPENDENZA LINEARE TRAMITE ELIMINAZIONE DI GAUSS, E

METTO I VETTORI IN COLONNA:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2IV+I]{2II+I} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2II+IV]{II-2III} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[III+IV]{} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

4 PIVOT(S) $\Longleftrightarrow$ 4 VETTORI LIN. INDIP. CHE SONO QUELLI IN CORRISP. DEI PIVOT, OVVERO

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

DUNQUE, $v_1, v_2, \dots, v_5$ GENERATORI DI $\mathbb{R}^4$

$\downarrow$

CASO 3 DEL TEOREMA!

INFATTI

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

APPLICHIAMO ϕ:

$$\underbrace{\phi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\| \leftarrow \text{DAL TESTO} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \overset{!}{=} -\underbrace{\boxed{\phi\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} - \underbrace{\boxed{\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} -2 \\ -k \end{pmatrix}}}$$

POICHÉ $(-2,1,0,1) \in \ker\phi$

DA CUI $\begin{cases} 2 = 2 \\ 1 = k \end{cases} \longrightarrow \boxed{k = 1}$

DUNQUE, TALE ϕ ESISTE SOLO PER $k=1$, ED IN TALE CASO (POICHÉ RIENTRIAMO NEL CASO (3)) È UNICA!

($\forall k \neq 1$ ϕ NON ESISTE!)

(b) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, DOVE $K=1$.

ABBIAMO MOSTRATO CHE UNA BASE DI $\mathbb{R}^4$ È DATA DA $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

DOVE
$$\phi\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0)$$
$$\phi\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (0,0)$$
$$\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)$$
$K=1$
$$\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2,-1)$$

SE VOLESSI SCRIVERE LA MATRICE DI ϕ NELLE BASI B DI $\mathbb{R}^4$ E LA CANONICA DI $\mathbb{R}^2$ TROVEREI:

$$M^{\phi}_{B, C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

MA IO VOGLIO $A = M^{\phi}_{C_{\mathbb{R}^4}, C_{\mathbb{R}^2}}$, QUINDI USIAMO LA FORMULA DEL CAMBIO DI BASE:

$$A = M^{\phi}_{C_{\mathbb{R}^4}, C_{\mathbb{R}^2}} = \mathbb{I} \cdot M^{\phi}_{B, C_{\mathbb{R}^2}} \cdot \left(M_{B \to C_{\mathbb{R}^2}} \right)^{-1}$$

CAMBIO DI BASE DEL CODOMINIO, QUA NON C'È!

CAMBIO DI BASE DEL DOMINIO INVERSO!

CALCOLIAMO:

$$\left(M_{B \to C_{\mathbb{R}^2}}\right)^{-1} = M_{C_{\mathbb{R}^2} \to B} = ?$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cancel{+} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cancel{+} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B \to C_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

CALCOLIAMO L'INVERSA CON GAUSS:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\mathrm{I}/(-2)$ $\rightarrow$ poi: $-\mathrm{I} + \mathrm{II}$, $\mathrm{IV} - \mathrm{I}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ $\mathrm{III} - \mathrm{II}$, $\mathrm{IV} - \mathrm{III}$ poi: $\mathrm{IV}/3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ $\mathrm{III} + \frac{3}{2}\mathrm{IV}$, $\mathrm{II} - \frac{1}{2}\mathrm{IV}$, $\mathrm{I} + \frac{1}{2}\mathrm{IV}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{I} + \mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

QUINDI:

$$\left(M_{B\to C_{\mathbb{R}^2}}\right)^{-1} = M_{C_{\mathbb{R}^2}\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 & +1/3 \end{pmatrix}$$

DA CUI:

$$A = M^{f}_{B, C_{\mathbb{R}^2}} \cdot \left(M_{B\to C_{\mathbb{R}^2}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5/6 & -3/2 & 7/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/2 & 5/6 & +1/6 \end{pmatrix}$$

(c) $Rg(A) = ?$

$$\begin{pmatrix} -5/6 & -3/2 & 7/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/2 & 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \xrightarrow[II - \frac{1}{5} I]{} \begin{pmatrix} -5/6 & -3/2 & 7/6 & -1/6 \\ 0 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$Rg(A) = 2$

QUESTO RISULTATO CE LO ASPETTAVAMO,

PERCHÉ

$$\left.\begin{aligned}
\phi(1,-1,1,-1) &= (2,1)\\
\phi(0,0,1,1) &= (1,1)\\
\phi(1,0,-1,0) &= (-2,-1)\\
\phi(-2,1,0,1) &= (0,0)\\
\phi(2,0,1,-3) &= (0,0)
\end{aligned}\right\} \quad \operatorname{Im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\downarrow$$

$$\dim \operatorname{Im}\phi = 2$$

(COME ATTESO A SUA VOLTA DAL TH. DEL RANGO

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker}\phi}_{=2} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}\phi}_{=2} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4}$$

$2+2=4$ ✓)

(d) $$\phi^{-1}(\{(1,2)\}) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \phi(x,y,z,w) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

QUINDI

$$A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5/6 & -3/2 & 7/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/2 & 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{5}{6} & -3/2 & 7/6 & -1/6 & 1 \\ -1/6 & -1/2 & 5/6 & 1/6 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{II - I/5} \left(\begin{array}{cccc|c} -5/6 & -3/2 & 7/6 & -1/6 & 1 \\ 0 & -1/5 & 3/5 & 1/5 & 9/5 \end{array}\right)$$

DA CUI

$$\begin{array}{l} I \\ II \end{array} \begin{cases} -5/6\, x - 3/2\, y + 7/6\, z - \frac{1}{6} w = 1 \\ -1/\cancel{5}\, y + 3/\cancel{5}\, z + 1/\cancel{5}\, w = 9/\cancel{5} \end{cases}$$

DA II: $y = 3z + w - 9$

~~DA CUI~~

DA CUI LA I AVEMO:

$$-\frac{5}{6} x = 1 + \frac{3}{2} y - \frac{7}{6} z + 1/6\, w$$

$$= 1 + 3/2 (3z + w - 9) - \frac{7}{6} z + \frac{w}{6}$$

$$= -\frac{25}{2} + \frac{10}{3} z + \frac{5}{3} w$$

$$\rightarrow x = 15 - 4z - 2w$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \phi(\{(1,2)\}) \longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} 15-4z-2w \\ -9+3z+w \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

DA CUI

$$f^{-1}(\{(1,2)\}) = \begin{pmatrix}15\\-9\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-4\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

SPAZIO AFFINE 2d

CON GIACITURA

$$\left\langle \begin{pmatrix}-4\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

PASSANTE PER IL PUNTO

$(15, -9, 0, 0)$

2

(a)

$$R_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$t \in \mathbb{R}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$, LA GIACITURA È $\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

EQ. CARTESIANE?

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\t\\t\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \rightarrow x = 2y = 2z \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = z \end{cases}$$

(b)

$$P_{\cancel{Q}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in R_2$$

$$R_2 // R_1 \Longrightarrow N_{R_2} = N_{R_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = -1 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

(c)

UN GENERICO PIANO Π IN $\mathbb{R}^3$ È

$ax + by + cz + d = 0$

PER TROVARE ~~I~~ I PIANI EQUIDISTANTI DA R_1, R_2 CON DISTANZA NON NULLA DA R_1 E DA R_2 DEVO

① TROVARE EQ. PER ~~GENERICO~~ FASCIO DI PIANI PARALLELO A R_1 E A R_2
(ALTRIMENTI SE NON È PARALLELO $d(R_1, \Pi) = 0$ E/O $d(R_2, \Pi) = 0$)

② SELEZIONO TRA I ~~...~~ PIANI TROVATI IN ①, QUELLI CHE SODDISFANO A
$d(R_1, \Pi) = d(R_2, \Pi)$

①: IL PIANO Π: $ax + by + cz + d = 0$
È IDENTIFICATO DAL VETTORE $v = (a, b, c)$ CHE È ORTOGONALE AL PIANO

DUNQUE, SE VOGLIO TROVARE $\Pi \parallel R_1$, $\Pi \parallel R_2$
DEVO AVERE $v \in (R_1)^\perp$, $v \in (R_2)^\perp$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow$ IMPONGO: $\begin{cases} v \cdot v_{R_1} = 0 \\ v \cdot v_{R_2} = 0 \end{cases}$

OVVERO $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

POICHÉ $v_{R_1} = v_{R_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$2a + b + c = 0$

QUINDI

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz + d = 0, \text{ con } 2a + b + c = 0 \right\}$

È UN FASCIO DI PIANI PARALLELO A r_1 E A r_2.

(2): IMPONGO $d(r_1, \pi) = d(r_2, \pi)$ e

SICCOME $\pi // r_1$ E $\pi // r_2$, ALLORA

PRENDO UN PUNTO QUALSIASI $Q_1 \in r_1$, DA CUI

$$d(r_1, \pi) = d(Q_1, \pi) = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

SCELGO

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in r_1$$

PRENDO UN PUNTO QUALSIASI $Q_2 \in r_2$, DA CUI

$$d(r_2, \pi) = d(Q_2, \pi) = \frac{|a(-1) + b(-1) + c \cdot 0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-a-b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

SCELGO

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

IMPONGO $d(r_1, \pi) = d(r_2, \pi) \iff \dfrac{|-a-b+d|}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \dfrac{|d|}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

10

$|-a-b+d| = |d|$

DA CUI, I PIANI EQUIDISTANTI DA r_1 E DA r_2 SONO DATI DA

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax+by+cz+d=0, \text{ DOVE } \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ |-a-b+d| = |d| \end{cases} \right\}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA DEI COEFFICIENTI:

$|-a-b+d| = |d|$

EQUIVALE A

$-a-b+d=d$ OPPURE $-a-b+d=-d$

QUINDI

$$\begin{cases} 2a+b+c=0 \\ |-a-b+d| = |d| \end{cases}$$

$$\nearrow \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ -a-b+d=d \rightarrow a+b=0 \rightarrow a=-b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -b+c=0 \\ a=-b \end{cases} \downarrow \begin{cases} b=c \\ a=-b \end{cases} \downarrow \boxed{a=-b=-c}$$

OPPURE

$$\searrow \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ -a-b+d=-d \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} b=2d-a \\ 2a+2(2d-a)+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=2d-a \\ \cancel{2a}+4d-\cancel{2a}+c=0 \rightarrow c=-4d \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} b=2d-a \\ c=-4d \end{cases}}$$

quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz + d = 0, \quad \text{dove } \left\{ a = -b = -c \right. \quad \text{ovvero } \begin{cases} b = 2d - a \\ c = -4d \end{cases} \right\}$$