SOLUZIONI - TUTORATO 11 (22/05/2024)

(SIMULAZIONI D'ESAME)

$\boxed{1}$

$\boxed{\text{ES. 1}}$

$$W = \langle (1,1,1),\ (0,1,-2),\ (1,3,-3) \rangle$$

(a) $B_W = ?$ $\dim W = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II - I \\ III - I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[III + 2II]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim W = 2$$

(b) EQ. CARTESIANE di W?

$$\forall w \in W \rightarrow \underset{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{w}} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

~~x = s~~ $\hookrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s + t \\ z = s - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = x + t \rightarrow t = y - x \\ z = x - 2t \rightarrow z = x - 2y + 2x \end{cases}$

$$\boxed{3X - 2Y - Z = 0}$$

EQ. CARTESIANE DI W

(c) $S < \mathbb{R}^3$ t.c. $S \oplus W = \mathbb{R}^3$

COMPLETIAMO $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ IN MODO TALE DA AVERE UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$.

AD ESEMPIO, PROVIAMO A PRENDERE

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

VA BENE? VERIFICO LIN. INDIP.:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 3 \text{ PIVOT}$$

$\Updownarrow$

3 VETTORI LIN. INDIP. ✓

DUNQUE, $S = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ È TALE CHE

$$S \oplus W = \mathbb{R}^3$$

(d) $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(1,1,1) = (2,2,0)$

$\varphi(1,3,-3) = (1,1,0)$

MATRICE A DI φ RISPETTO A DELLE BASI DI W E DI $\mathbb{R}^3$ SCELTE DA NOI?

$$W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\text{BASE DI } W} \rangle$$

MA SICCOME IL RANGO DI $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 3\\1 & -2 & -3\end{pmatrix}$

ABBIAMO VERIFICATO IN (a) ESSERE 2,

POSSO ANCHE USARE COME BASE DI W

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

SCELGO QUESTA SOLO POICHÉ È LA SCELTA PIÙ SEMPLICE (INFATTI IL TESTO MI DICE QUANTO VALE $\varphi(1,3,-3)$).

COME BASE DI $\mathbb{R}^3$ INVECE SCELGO

$\cancel{\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$ LA BASE CANONICA $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

QUINDI:

$\varphi(1,1,1) = (2,2,0)$

$\varphi(1,3,-3) = (1,1,0)$

$$\rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}}$$

(e) BASE PER $\ker\varphi$? BASE PER $\operatorname{Im}\varphi$?

$\to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_W} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

· $\ker\varphi$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \to y = -2x$$

DUNQUE $\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_W} \right\rangle \to \dim \ker\varphi = 1$

· $\operatorname{Im}\varphi$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ GENERATORI PER $\operatorname{Im}\varphi$ MA SONO UNO IL DOPPIO DELL'ALTRO, DUNQUE UNA BASE PER $\operatorname{Im}\varphi$ È $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, i.e.

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \to \dim \operatorname{Im}\varphi = 1$$

N. B.:

E CONSISTENTE POICHÉ DAL TH. DEL RANGO

$$\underbrace{\dim W}_{\substack{\parallel \\ 2}} = \underbrace{\dim(\ker \varphi)}_{\substack{\parallel \\ 1}} + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} \varphi)}_{\substack{\parallel \\ 1}} = 2$$

(f) TROVARE UN ENDOMORFISMO $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ TALE CHE $\phi(w) = \varphi(w) \quad \forall w \in W$

E INOLTRE TALE CHE $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Im} \varphi$.

L'IDEA È QUELLA DI PRENDERE $\varphi : \underset{\substack{\wedge \\ \mathbb{R}^3}}{W} \to \mathbb{R}^3$ E DI ESTENDERLA AD UNA MAPPA $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

TALE CHE

1. $\phi(w) = \varphi(w) \quad \forall w \in W$ OVVERO SE RESTRINGIAMO IL DOMINIO DI ϕ A $W < \mathbb{R}^3$ DEVO AVERE LA STESSA MAPPA: $\phi|_W = \varphi$

2. VOGLIO CHE $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Im} \varphi$, DUNQUE $\forall v \in \mathbb{R}^3 \setminus W \to \exists w \in W$ t.c. $\phi(v) = \varphi(w)$

DA ①:

SE SCELGO $\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

BASE

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

PER DOMINIO

BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$ PER CODOMINIO

ALLORA LA MATRICE ASSOCIATA A ϕ

È

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

VETTORE $\phi(0,0,1)$ NON NOTO

IMPONGO CIÒ POICHÉ USO

$\phi(1,1,1) = \psi(1,1,1)$

$\phi(1,3,-3) = \psi(1,3,-3)$

i.e.

$\phi|_W = \psi$ (CONDIZIONE ①)

MA SICCOME VOGLIO ②, OVVERO

CHE $\mathrm{Im}\, \phi = \mathrm{Im}\, \psi$,

QUANDO FACCIO

$\phi(0,0,1) =$

POSSO SCEGLIERE IO CHE VALORE DARE, PER FARLO SCELGO UN CERTO $w^* \in W$ E DICO CHE $\phi(0,0,1) = \psi(w^*) \rightarrow$

AD ESEMPIO, $w^{\perp} = (1,1,1) - (1,3,-3) = (0,-2,4)$

$$\phi(0,0,1) := \varphi(0,-2,4) =$$

$$\underset{\text{LINEARITÀ DI } \varphi}{=} \varphi(1,1,1) - \varphi(1,3,-3) = (2,2,0) - (1,1,0) = (1,1,0)$$

QUINDI

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DA CUI $\forall v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ 2x + y + z \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(x,y,z)$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

(a)

$$P_{A_\mu}(\lambda) = \underbrace{\det(A_\mu - \lambda I)}_{\shortparallel} = 0$$

SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO 1° COLONNA

$$\det\begin{pmatrix} \mu-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\mu-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu - \lambda)\left(\underbrace{(1-\lambda)^2 - 4}_{\underbrace{[(1-\lambda)+2][(1-\lambda)-2]}_{(3-\lambda)(-1-\lambda)}}\right)$$

i.e.

$$(\mu-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA?

- SE $\mu \neq 3, -1 \longrightarrow$ $\lambda = \mu$ m.a. $= 1$; $\lambda = 3$ m.a. $= 1$; $\lambda = -1$ m.a. $= 1$
- SE $\mu = 3 \rightarrow$ $\lambda = 3$ m.a. $= 2$; $\lambda = -1$ m.a. $= 1$
- SE $\mu = -1 \rightarrow$ $\lambda = 3$ m.a. $= 1$; $\lambda = -1$ m.a. $= 2$

(b) PER $\mu = -1$ OPPURE $\mu = 3$ ABBIAMO CHE C'È UN AUTOVALORE (RISPETTIVAMENTE $\lambda = -1$ OPPURE $\lambda = 3$) CON MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 2

CALCOLIAMO GLI ASSOCIATI AUTOSPAZI:

- $\mu = -1 \Rightarrow E^{A_{-1}}_{\lambda=-1} = ?$

$$E^{A_{\mu=-1}}_{\lambda=-1} = ?$$

$$(A_{-1} - \lambda \mathbb{I})\,v = 0 \xrightarrow[\lambda=-1]{} (A_{-1} + \mathbb{I})\,v = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow y + z = 0 \to y = -z \to \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ -z\\ z\end{pmatrix}$$

DUNQUE

$$E^{A_{-1}}_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ -1\\ +1\end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\underline{\mu = +3} \to E^{A_{\mu=3}}_{\lambda=3} = ?$

$$(A_3 - 3\mathbb{I})\,v = 0$$

$$\hookrightarrow \left[\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\cdot 3 & 0 & 0\\ 0 & 1\cdot 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\cdot 3\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \to \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \to y = z = 0$$

DUNQUE $E^{A_{\mu=3}}_{\lambda=3} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \right\rangle \to m.g.(\lambda=3) = 1 < 2$

DUNQUE:

PER $\mu = 3$, A_μ NON DIAGONALIZZ.

(c)

- PER $\mu = 3 \rightarrow A_\mu$ NON DIAGONALIZZ. DAL PUNTO (b)

- PER $\mu \neq 3, -1 \rightarrow A_\mu$ DIAGONALIZZ. POICHÉ AUTOVALORI DISTINTI!

- PER $\mu = -1$?

L'AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda = -1$ (CHE HA $m.a.(\lambda=-1) = 2$)

È (DAL PUNTO (b)):

$$E_{\lambda=-1}^{A_{-1}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

MA PER $\mu = -1$ C'È ANCHE L'AUTOVALORE $\lambda = 3$ CON $m.a.(\lambda=3) = 1$,

CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO ASSOCIATO:

$$E_{\lambda=3}^{A_{-1}} = ? \quad (A_{-1} - 3\mathbb{I})v = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\to \begin{cases} -4x + y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Big\} \; y = z$$

$$\to \begin{cases} -4x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \to \Big\{ \quad x = \frac{z}{2}$$

per $\mu = -1$:

$$E^{A_{-1}}_{\lambda=3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to m.g.(\lambda = 3) = m.a.(\lambda=3) = 1$$

DUNQUE, $\forall \mu \neq 3$ A_μ DIAGONALIZZ.

(NON È DIAGONALIZZ. SOLO PER $\mu = 3$).

(d) $\mu = 1 \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

AUTOVALORI (DA (a)): $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 3$

• $\lambda = 1$: $(A_1 - \mathbb{I})v = 0 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to E^{A_1}_{\lambda=1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = -1$: $(A_1 + \mathbb{I})v = 0 \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Big\} \to y = -z \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \to E^{A_1}_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\lambda = +3$:

$$(A - 3\mathbb{I})v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ \left.\begin{array}{l} -2y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \to y = z \end{cases} \to \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\to \left\{ x = y = z \right.$$

DUNQUE, $E^{A_1}_{\lambda=3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$ DATA ~~DA~~ AUTOVETTORI DI A_1 È $\left\{ \underset{\lambda=1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

DUNQUE

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

~~DA ori~~ ~~P~~

TALI CHE $PDP^{-1} = A_1$.