SOLUZIONI $\sim 60$ PERSONE

ES. 1

(a) $x^2-2=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0 \rightarrow x=\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \rightarrow \nexists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2-2=0$

(b) $(\alpha, 0) + (\beta, 0) = ?$

$(\alpha, 0) \Leftrightarrow \alpha + i\,0 = \alpha \in \mathbb{R}$

$(\beta, 0) \Leftrightarrow \beta + i\,0 = \beta \in \mathbb{R}$

Dunque, $(\alpha, 0) + (\beta, 0) \Leftrightarrow \alpha+\beta \in \mathbb{R}$

$\alpha+\beta \Updownarrow (\alpha+\beta, 0)$

i.e. $(\alpha, 0) + (\beta, 0) = (\alpha+\beta, 0)$

$(\alpha, 0)\,(\beta, 0) = ?$

$(\alpha, 0) \Leftrightarrow \alpha + 0\,i = \alpha \in \mathbb{R}$

$(\beta, 0) \Leftrightarrow \beta + 0\,i = \beta \in \mathbb{R}$

Dunque, $(\alpha, 0)\cdot(\beta, 0) \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta \in \mathbb{R}$

$\alpha\cdot\beta \Updownarrow (\alpha\cdot\beta, 0)$

i.e. $(\alpha, 0)\cdot(\beta, 0) = (\alpha\cdot\beta, 0)$

(c) $z = (a+ib)^2(c+id) = (a+ib)(a+ib)(c+id) =$

$= \left(a^2 + (ib)^2 + 2\cdot a\cdot(ib)\right)(c+id) =$

$\underset{i^2=-1}{=} (a^2 - b^2 + 2iab)(c+id) = a^2c + ia^2d - b^2c - ib^2d + 2iabc + 2(i)^2abd =$

$= a^2c + ia^2d - b^2c - ib^2d + 2iabc - 2abd =$

$= \underbrace{(a^2c - b^2c - 2abd)}_{\operatorname{Re} z} + i\underbrace{(a^2d - b^2d + 2abc)}_{\operatorname{Im} z}$

ES. 2

1) $$A+B = \begin{pmatrix} 2+14 & 5-1 & 7+2 \\ 8+7 & 9+4 & 10+5 \\ -1+1 & 2+0 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 9 \\ 15 & 13 & 15 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2) $C \in M_{2,3}(\mathbb{C}),\quad D \in M_{3,2}(\mathbb{C}) \rightarrow C \cdot D \in M_{2,2}(\mathbb{C}) \rightarrow$ esiste!

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 2+3i & 4 & -5i \\ 7 & -1 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7i & 8 \\ 4 & -1 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2+3i)\,7i + 4 \cdot 4 + 11(-5i) & (2+3i) \cdot 8 + 4(-1) + (-5i)\cdot 0 \\ 7 \cdot (7i) + 4 \cdot (-1) + 3i\,(11) & 7 \cdot 8 + (-1)\cdot(-1) + (3i)\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14i - 21 + 16 - 55i & 16 + 24i - 4 \\ 49i - 4 + 33i & 56 + 1 \end{pmatrix} =$$

$i^2 = -1$

$$= \begin{pmatrix} -5 - 41i & 12 + 24i \\ -4 + 82i & 57 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$$

COME ATTESO!

ESISTE $D \cdot C$?

SI, INFATTI $D \cdot C \in M_{3,3}(\mathbb{C})$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 7i & 8 \\ 4 & -1 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+3i & 4 & -5i \\ 7 & -1 & 3i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7i(2+3i)+8\cdot 7 & 7i\cdot 4+8(-1) & 7i(-5i)+8\cdot 3i \\ 4(2+3i)+7\cdot(-1) & 4\cdot 4+(-1)(-1) & 4\cdot(-5i)+(-1)\cdot 3i \\ 11(2+3i)+0\cdot 7 & 11\cdot 4+0(-1) & 11\cdot(-5i)+0\cdot 3i \end{pmatrix} =$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 35+14i & -8+28i & 35+24i \\ 1+12i & 17 & -23i \\ 22+33i & 44 & -55i \end{pmatrix}$$

CONTINUA PER ESERCIZIO E USCIRÀ

(c) $E^2$ NON ESISTE, INFATTI AVREI

$$E^2 = E \cdot E = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}}$$

SONO DIVERSI !!!

PIÙ IN GENERALE

$A^2$ ESISTE $\Leftrightarrow$ NUMERO RIGHE DI $A$ = NUMERO COLONNE DI $A$

DUNQUE $A \in M_{m,m}$ → NON È (INFATTI) IL CASO DI "E" POICHÉ E NON È UNA MATRICE QUADRATA

STESSO m

DUNQUE:
UN ESEMPIO DI MATRICE $A$ t.c. $A^2$ ESISTE È

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ES. 3

· $A_1$ È GIÀ IN FORMA A SCALA (E SIAMO CONTENTI COSÌ! :) )
MA $A_2$ NO!
UTILIZZIAMO L'ALGORITMO DI GAUSS:

$$A_2 = \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\underset{\substack{\mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \text{AL POSTO DELLA III}}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\mathrm{I} - 2\cdot\mathrm{III} \\ \text{AL POSTO DELLA III}}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & -10 \end{pmatrix} \underset{\substack{3\mathrm{II} + \mathrm{III} \\ \text{AL POSTO DELLA III}}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

N.B.: OVVIAMENTE POTRESTE (NELLA RICERCA DI UNA FORMA A SCALA) TROVARE UNA DIVERSA MATRICE POICHÉ AVETE SCELTO UNA DIVERSA PROCEDURA RISOLUTIVA.
AD ESEMPIO UNO POTEVA ANCHE FARE LE SEGUENTI OPERAZIONI: $\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 2\mathrm{I}$, $\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \mathrm{I}$,

$$\mathrm{III} \to \mathrm{III} - \frac{1}{3}\mathrm{II}$$

OTTENENDO
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

ANCHE QUEST'ULTIMA È CORRETTA, UNO PUÒ INFATTI VERIFICARE CHE IL SISTEMA LINEARE ASSOCIATO A QUEST'ULTIMA MATRICE HA LO STESSO INSIEME DI SOLUZIONI DELLA MATRICE CHE ABBIAMO TROVATO PRIMA!

## ES. 4

• METODO ALGEBRICO (SCUOLE AKA SUPERIORI): ESPLICITO UNA VARIABILE DA UNA EQUAZIONE E LA SOSTITUISCO NELL'ALTRA, i.e.

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 6x_2 + 6 \\ 4x_1 + 2x_2 = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2 \\ 4x_1 + 2x_2 = -12 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2 \\ 4(2x_2 + 2) + 2x_2 = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2 \\ 8x_2 + 8 + 2x_2 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2 \\ 10x_2 = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot (-2) + 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}}$$

• METODO MATRICIALE

LA MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA È

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 6 \\ 4 & 2 & -12 \end{array}\right) = (A|b)$$

RIDUCIAMOLA IN FORMA A SCALA.

$$(A|b) \underset{\substack{I/3 \\ II/2}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \underset{II-2I}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -10 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\underset{II/5}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

↳ DALLA 2° RIGA:

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = -2 \rightarrow x_2 = -2$$

CHE, INSERENDOLO NELLA PRIMA $x_1 - 2x_2 = 2$,

FORNISCE $x_1 = -2$ $\rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}}$

N.B. IL METODO MATRICIALE PUÒ SEMBRARE INUTILE (ED IN QUESTO ESEMPIO LO È!) MA È UNO STRUMENTO MOLTO POTENTE QUANDO SI HA A CHE FARE CON UN SISTEMA LINEARE COMPLICATO DA RISOLVERE ALGEBRICAMENTE!

ES.5 PER TROVARE Sol(A|b), UTILIZZIAMO L'ELIMINAZIONE DI GAUSS PER (A|b) E RISOLVIAMO IL SISTEMA SEMPLIFICATO E RIDOTTO!

- $Sol(A_3|b_3) = ?$

$$(A_3|b_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & 9 \\ -5 & 1 & -7 & -21 \end{array}\right) \underset{\substack{III+5\cdot I \\ II-3I}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -10 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & -12 & -26 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\underset{\substack{III+II \\ II/2}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \end{array}\right) \underset{II \leftrightarrow III}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\underset{5II+III}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & -16 & -64 \end{array}\right) \underset{-III/16}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

IL SISTEMA ASSOCIATO DIVIENE:

$$\begin{cases} (1)\cdot x_1 + 2\cdot(x_2) + (-1)x_3 = -1 \\ \cancel{(0)\cdot x_1} + 1\cdot(x_2) + (-4)x_3 = -14 \\ \cancel{0\cdot x_1} + \cancel{0\cdot x_2} + (1)\cdot x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - 4\cdot(4) = -14 \rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}}$$

- $Sol(A_4|b_4) = ?$

STESSO METODO USATO PRIMA:

$$(A_4|b_4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 15 & -137 \\ 1 & 8 & -10 & 203 \\ -2 & -16 & 20 & -21 \end{array}\right) \underset{I \leftrightarrow II}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -10 & 203 \\ 2 & -3 & 15 & -137 \\ -2 & -16 & 20 & -21 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{II-2I \\ III+2I}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -10 & 203 \\ 0 & -19 & 35 & -543 \\ 0 & 0 & 0 & 385 \end{array}\right)$$

↓

QUESTA RIGA CORRISPONDE ALL'EQUAZIONE

$$\underbrace{0x_1 + 0x_2 + 0x_3}_{=0} = 385$$

↓

$0 = 385 \rightarrow$ IMPOSSIBILE !

DUNQUE, IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI !

ES 6. CERCHIAMO UN SISTEMA DI EQ. A 3 INCOGNITE CON $Sol(A|b) = \{(t, -2, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$

BANALMENTE $\begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 5 \end{cases}$

È UNA POSSIBILE RISPOSTA,

ALTRESÌ IL SEGUENTE VA BENE

$$\begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 + x_2 = 3 \end{cases}$$

N.B.: OGNI POSSIBILE SISTEMA LINEARE IN $x_1, x_2, x_3$ CHE SI RIDUCE A $x_2 = -2$, $x_3 = 5$ VA BENE!

ES. 7:

LA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA È

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & -(\lambda^2+9-6\lambda) & \lambda-2 & 1 \\ \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^2-6\lambda+9 & 3 & \lambda-3 \\ \lambda+1 & -(\lambda^2+9-6\lambda) & \lambda+1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda-2 & 1 \\ (\lambda+1)(\lambda-3) & (\lambda-3)^2 & 3 & \lambda-3 \\ \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda+1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

È PIÙ COMODO FATTORIZZARE!

$$\underset{\mathrm{I}\cdot(-\lambda+3)+\mathrm{II}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & (\lambda-3)^2+(\lambda-3)^3 & 3-(\lambda-3)(\lambda-2) & 0 \\ \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda+1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & (\lambda-3)^2(\lambda-2) & 3-(\lambda-3)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$= (\lambda-3)^2+(\lambda-3)^3 = (\lambda-3)^2+(\lambda-3)^2(\lambda-3) = (\lambda-3)^2(1+\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3)^2(\lambda-2)$$

$\downarrow$

~~3 CASI~~

1

IL SISTEMA ASSOCIATO É

$$\begin{cases} (\lambda+1)x_1 - (\lambda-3)^2 x_2 + (\lambda-2)x_3 = 1 \\ (\lambda-3)^2(\lambda-2)x_2 + [3-(\lambda-3)(\lambda-2)]x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \Rightarrow \underline{x_3 = 0} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} (\lambda+1)x_1 - (\lambda-3)^2 x_2 = 1 \\ (\lambda-3)^2(\lambda-2)x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

**2** CASI:

1 $\lambda \neq 2, 3$

$\hookrightarrow$ DALLA 2° EQ., SI TROVA: $x_2 = 0$

E LA 1° EQ. DIVENTA

$(\lambda+1)x_1 = 1$

$\downarrow$

2 SOTTOCASI:

1.1 $\lambda \neq -1 \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{\lambda+1}$

1.2 $\lambda = -1 \rightarrow$ L'EQUAZIONE DIVENTA $0 = 1$ (IMPOSSIBILE)

$\downarrow$

DA QUI IL SISTEMA É IMPOSSIBILE!

2 $\lambda = 2$ O $\lambda = 3$

$\hookrightarrow$ LA 2° EQ. É $0x_2 = 0 \Rightarrow \forall x_2 \in \mathbb{R}$

2.1 $\lambda = 2 \rightarrow$ LA 1° EQ. DIVENTA

$3x_1 - x_2 = 1 \rightarrow x_1 = \dfrac{1+x_2}{3}$

2.2 $\lambda = 3 \rightarrow$ LA 1° EQ. DIVENTA

$4x_1 = 1 \rightarrow x_1 = \left(\dfrac{1}{4}\right)$.

IN CONCLUSIONE:

- Se $\lambda \neq -1, 2, 3 \rightarrow \exists!$ SOLUZIONE

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\lambda + 1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

- Se $\lambda = -1 \Rightarrow \nexists$ SOLUZIONI

- Se $\lambda = 2 \Rightarrow \exists$ INFINITE SOLUZIONI CHE SONO

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + x_2}{3} \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

- Se $\lambda = 3 \Rightarrow \exists$ INFINITE SOLUZIONI CHE SONO

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$