TUTORATO 4 - 03/04/2024

① ES. 5 DEL TUTORATO 3

② SIANO U_1, U_2 DUE SOTTOSP. VETT. DI $\mathbb{R}^4$ CON

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0, \; x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

$$U_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \underset{\text{NOTAZIONE}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) SI DETERMINI UNA BASE DI U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$

(b) SI VERIFICHI LA VALIDITÀ DEL TEOREMA DI GRASSMANN

③ SIA $V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

SIA $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$

(a) I SOTTOSP. (DI $\mathbb{R}^4$) V, W SONO TRA LORO IN SOMMA DIRETTA?

(b) DETERMINARE UN SOTTOSP. U DI $\mathbb{R}^4$ TALE CHE $V \oplus U = W \oplus U = \mathbb{R}^4$

4) NELLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^4$, SI CONSIDERINO AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$ I DUE SOTTOSPAZI

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha-3 \\ 2 \\ -4+3\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\{ \underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\underline{x}}} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_4 = 0 \\ (\alpha-1)\,x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

(a) CALCOLARE $\dim U$ E TROVARNE UNA BASE

(b) LO STESSO MA PER W

(c) CALCOLARE $\dim(U \cap W)$ E TROVARNE UNA BASE

(d) QUANTO VALE ALLORA LA DIMENSIONE DI $U+W$?

5) SI DICA SE LE SEGUENTI FUNZIONI SONO LINEARI

(a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f_1(x) = (x_1 + x_2 - x_3,\, 2x_1 - 3x_2,\, x_3)$$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x=(x_1,x_2) \longmapsto f_2(x) = (2x_1 + x_2,\ x_1 - x_2^2)$$

(c) $f_3 : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P(x) \longmapsto f_3(P(x)) = \left(\int_1^2 P(x)\,dx,\ P(-1)\right)$$