ESERCIZI 2 (13/03/2024)

ARGOMENTI:
- SISTEMI LINEARI
- SPAZI VETTORIALI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

ES. 1

DISCUTERE AL VARIARE DI $m \in \mathbb{R}$ LE POSSIBILITÀ SU $Sol(A|b)$, DOVE

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} m & m-1 & m+2 \\ m+1 & -m & 5m+3 \end{array}\right)$$

ES. 2:

(a) L'INSIEME $S := \{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^3$?
PERCHÉ?

(b) RIPETERE L'ESERCIZIO PER L'INSIEME

$$S = \{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = a, \ a \in \mathbb{R} \}$$

ES. 3:

(a) DIMOSTRARE CHE $\mathbb{R}^3$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

(b) DIMOSTRARE CHE $\mathbb{R}^3$ NON È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ RISPETTO ALLE OPERAZIONI

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0)$$

ES. 4:

SIA S L'INSIEME DELLE MATRICI 3×3 TRIANGOLARI SUPERIORI, OVVERO

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R}, \ i,j = 1,2,3 \right\}$$

(a) VERIFICARE CHE S È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLE MATRICI 3×3

~~(b) VERIFICARE CHE LO SPAZIO DELLE MATRICI~~

ES. 5

VERIFICARE CHE

(a) LO SPAZIO S' DELLE FUNZIONI $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

(b) LO SPAZIO DELLE FUNZIONI "QUADRATO INTEGRABILI"

OVVERO $$A := \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 \, dx < \infty \right\} \subset S'$$

È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI S

ES. 6

(a) VERIFICARE CHE LO SPAZIO DEI POLINOMI DI INCOGNITA $x \in \mathbb{R}$, DI GRADO MASSIMO $m \in \mathbb{N}_{>0}$, INDICATO CON $\mathbb{R}_{\leq m}[x]$, È UNO SPAZIO VETTORIALE.

(b) TROVARE DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}_{\leq m}[x]$

ES. 7 (FACOLTATIVO)

SI PENSI SE C'È UN LEGAME TRA I SEGUENTI SPAZI VETTORIALI:

$$\mathbb{R}^{n \cdot m}, \quad M_{n,m}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{is} \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n,\ s=1,\dots,m \right\}$$

PIÙ PRECISAMENTE: ESISTE UNA MAPPA INVERTIBILE TRA $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ E $M_{n,m}(\mathbb{R})$? QUALE POTREBBE ESSERE?