CALCOLO NUMERICO

Ing. chimica e dei materiali Canale A - A.A. 2023-24

Esercizi: Metodi iterativi per sistemi lineari

Esercizio 1. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & \alpha \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro reale.

1. Si determini il valore di α che minimizza il raggio spettrale della matrice di iterazione di Jacobi.
2. In corrispondenza al valore trovato di α, si vuole risolvere il sistema $Ax = b$ dove $b = (10, 4, 2)^T$. Si verifichi che, partendo dalla soluzione iniziale $x_0 = (0, 0, 0)^T$, il metodo di Jacobi converge alla soluzione vera $\bar{x}$ in tre iterazioni; calcolare $\bar{x}$.
3. Trovare un vettore iniziale x_0 a partire dal quale il metodo converge in una iterazione.

Svolgimento.

1. $$B_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -\alpha/4 \\ -3/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \sqrt{\alpha - 3}/2 \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha - 3}/2 \quad \lambda_3 = 0.$$

   Quindi $\rho(B_J) = \sqrt{\alpha - 3}/2$ è minimizzato da $\alpha = 3$, ottenendo $\rho(B_J) = 0$.
2. Si ottengono le sequenti iterate: $x_1 = [2.5, 2, 2]^T$, $x_2 = [2, -1.75, 0.5]^T$, $x_3 = [2, -1, 0]^T$. Per sostituzione si nota che $r_3 = b - Ax_3 = [0, 0, 0]^T$, per cui x_3 è la soluzione vera.
3. Sapendo che x_3 è la soluzione vera, basta usare x_2 come soluzione iniziale.

Esercizio 2. Si vuole risolvere il seguente sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Dire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.
2. Partendo dal vettore iniziale $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ calcolare $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ con il metodo di Gauss-Seidel.
3. Utilizzando la norma degli scarti dare una stima della costante asintotica dell'errore.

Svolgimento.

1. La matrice A è diagonalmente dominante in senso stretto per righe e quindi Jacobi converge. Inoltre A è tridiagonale e quindi biciclica e coerentemente ordinata, quindi $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$. Quindi anche Gauss-Seidel converge.

2. Con GS si ottienono le seguenti tabelle:

x_0	x_1	x_2	x_3
0	1.3333	2.8889	1.5370
0	2.3333	0.3056	1.3617
0	5.0000	3.4792	4.2713

$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$
1.3333	1.5556	1.3519
2.3333	2.0278	1.0561
5.0000	1.5208	0.7921

Le norme degli scarti $\|s_k\| = \|x_k - x_{k-1}\|$ e i loro rapporti forniscono la stima del raggio spettrale della matrice di GS.

k	$\|s_k\|$	$\|s_k\| / \|s_{k-1}\|$
1	5	–
2	2.0278	0.4056
3	1.3519	0.6667

da cui si evince che $\rho(B_{GS}) \approx 0.6667$.

Esercizio 3. Dato sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

2. Dire se tale metodo converge e trovare il numero di iterazioni necessario per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^i, $i = 6, 8, 10$.

3. Calcolare $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$.

Svolgimento.

1. la matrice A è tridiagonale e quindi BCO. Quindi:

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1(B_J) = 0; \lambda_{2,3}(B_J) = \pm\frac{1}{\sqrt{15}} \quad \lambda_{max}(B_{GS}) = \lambda_{2,3}^2(B_J) = \pm\frac{1}{15}$$

2. Ovviamente il metodo di Gauss-Seidel converge perchè $\lambda_{max}(B_{GS}) < 1$. Inoltre, possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
\|\epsilon_k\|_2 = & \rho(B_{GS})^k \|\epsilon_0\|_2 \leq 10^{-8} \|\epsilon_0\|_2 \\
\Longrightarrow \quad & k \underbrace{\log_{10} \rho(B_{GS})}_{<0} \leq -8 \underbrace{\log_{10} 10}_{1} \\
\Longrightarrow \quad & k \geq \frac{6, 8, 10}{-\log_{10}(\lambda_{max}(B_{GS}))} = 5.1016, 6.8022, 8.5027 \qquad k \geq 6, 7, 9.
\end{aligned}
$$

3. $x_1 = [1.4, 1.8667, 3.0333]^T$; $x_2 = [1.0267, 1.9911, 3.0022]^T$.

Esercizio 4. Dato il sistema lineare $Ax = b$ con:

$$
A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1/3 \end{pmatrix}
$$

1. Calcolare per quali valori del parametro reale α il metodo di Gauss-Seidel converge;
2. usando $\alpha = 2/3$, calcolare il raggio spettrale della matrice di Gauss-Seidel;
3. usando $\alpha = 2/3$, trovare le prime tre iterazioni del metodo di Gauss-Seidel;
4. usarle per trovare una stima del raggio spettrale della matrice di Gauss-Seidel e confrontare tale valore approssimato con il valore trovato al punto 2.

Svolgimento.

1. La matrice è BCO. Analizziamo Jacobi:

$$
B_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} -\mu & 1/4 & 0 \\ 1/4 & -\mu & 1/4 \\ 0 & 1/\alpha & -\mu \end{bmatrix} = 0 \qquad \mu_1 = 0; \mu_{2,3} = \sqrt{\frac{4-\alpha}{16\alpha}}
$$

Condizioni di convergenza per Gauss-Seidel:

$$
\lambda = \mu^2 \Rightarrow \left| \frac{4-\alpha}{16\alpha} \right| < 1
$$

che porta a:

$$
\alpha < -\frac{4}{15} \qquad \text{and} \qquad \alpha > \frac{4}{17}.
$$

2. $\alpha = 2/3 > 4/17$ è ammissibile. $\lambda_{max} = 7/16$.

3. Partendo da $x_{(0)} = (0, 0, 0)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= (0.75, 0.6875, 0.53125) \\ x_{(2)} &= (0.921875, 0.863281, 0.794922) \\ x_{(3)} &= (0.96582, 0.940186, 0.910278) \end{aligned}$$

4. La soluzione vera è evidentemente $x = (1, 1, 1)$. Possiamo usare gli errori. Abbiamo:

$$\begin{aligned} e_2 &= (-0.078125, -0.136719, -0.205078) \\ e_3 &= (-0.0341797, -0.0598145, -0.0897217) \end{aligned}$$

da cui:

$$\lambda_{max} = \frac{\|e3\|}{\|e2\|} = 7/16.$$