5E-Sistemi lineari-Metodi iterativi

martedì 14 maggio 2024 18:11

METODI ITERATIVI PER $Ax = b$

<u>Pb</u>. Data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile e $b \in \mathbb{R}^n$,

trovare $x \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$Ax = b$$

OSS. possiamo scrivere la soluzione esatta come $x^* = A^{-1} b$

<u>MA</u> NON vogliamo calcolare A^{-1} (costa come risolvere n sistemi lineari)

↳ METODI DIRETTI (lez. precedenti): si basano su una fattorizzazione di A per ottenere sistemi equivalenti semplificati

↳ <u>METODI ITERATIVI</u>: si basano nel trovare una successione di vettori di $\mathbb{R}^n$ che converge a x^*

$$\{x_k\} \to x^*$$

Ricordiamo il <u>METODO DI PICARD</u> (visto nel cap. 2)

<u>Pb</u>. Trovare α : $f(x) = 0$ $\quad [x \in \mathbb{R},\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$

$\Leftrightarrow$ Trovare α : $x = x + f(x) = g(x)$

METODO DI PUNTO FISSO $\quad x_{k+1} = g(x_k)$

$\varepsilon_k = x_k - \alpha$ $\quad$ ERRORE

$|\varepsilon_k| \searrow 0$ se e solo se $|g'(\alpha)| < 1$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|} = M = |g'(\alpha)|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p = 1 \\ M = |g'(\alpha)| < 1 \end{array}}$$

Vediamo di estendere queste idee ai sistemi lineari!

Possiamo definire una $f(x)$ vettoriale:

$$f(x) = b - Ax \qquad [f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineare}]$$

e riscrivere il nostro sistema lineare nel problema equivalente:

<u>Pb.</u> Trovare $x \in \mathbb{R}^n$: $f(x) = b - Ax = 0$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$

<u>IDEA</u>. Ricaviamo la funzione di punto fisso (in $\mathbb{R}^n$)

$$x = x + \underbrace{f(x)}_{\substack{\| \\ b - Ax =: r}} = g(x)$$

RESIDUO

e riscriviamo il passo di Picard per il vettore $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x_{k+1} = x_k + \boxed{r_k} = x_k + \overbrace{b - Ax_k}^{\text{residuo}}$$

$$= (I - A)\, x_k + b$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = (I - A)\, x_k + b}$$

METODO DI RICHARDSON

(primo caso di metodo iterativo lineare stazionario)

Dato questo schema, STUDIAMONE LA CONVERGENZA:

convergenza $\Leftrightarrow$ consistenza + stabilità

1) <u>CONSISTENZA</u> PER $x_{k+1} = (I - A)\, x_k + b$

Sostituire la soluzione vera $x^* = A^{-1} b$:

$$x^* = (I - A)\, x^* + b$$

$$\cancel{x^*} = \cancel{x^*} - Ax^* + b$$

$$0 = -A(A^{-1}b) + b = 0 \quad \checkmark \quad (0 = 0)$$

$\Rightarrow$ lo schema è consistente: sostituendo la soluzione vera lo schema è soddisfatto

2) <u>STABILITÀ</u> (dobbiamo verificare che l'errore sia limitato)

$\varepsilon_k = x_k - x^* \in \mathbb{R}^M$ è un vettore

$$x_{k+1} = (I-A)x_k + b$$
$$x^* = (I-A)x^* + b$$
$\ominus$ (sottraggo)

$$x_{k+1} - x^* = (I-A)(x_k - x^*) \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = (I-A)\varepsilon_k$$

relazione dell'errore

Partendo da $x_0 \in \mathbb{R}^M$ vettore arbitrario iniziale:

$\varepsilon_0 = x_0 - x^*$ errore iniziale

$\varepsilon_1 = (I-A)\varepsilon_0$

$\varepsilon_2 = (I-A)\varepsilon_1 = (I-A)^2\varepsilon_0$

.... $\varepsilon_k = (I-A)^k\varepsilon_0$

(per le funzioni scalari prendevamo il valore assoluto ORA ..)

prendo le <u>NORME</u> a dx e sx dell' = (serve norma compatibile con la norma di vettore)

$\|\varepsilon_k\|_2 = \|(I-A)^k\varepsilon_0\|_2$ applico Cauchy-Schwartz

$\leq \|(I-A)^k\|_2 \, \|\varepsilon_0\|_2$

$\leq \|I-A\|_2^k \, \|\varepsilon_0\|_2$

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\Rightarrow$ con $A = B$

$\|A^2\| \leq \|A\|^2$

$$\Rightarrow \boxed{\|\varepsilon_k\|_2 \leq \|I-A\|_2^k \, \|\varepsilon_0\|_2}$$

RICORDIAMO: vogliamo che per $k \to \infty$

$\|\varepsilon_k\| \leq M$

per Picard: avevamo $|\varepsilon_k| \le M |\varepsilon_0|$
e si ha convergenza
se e solo se $M < 1$
$\Rightarrow$ intuitivamente vogliamo avere la stessa condizione

$$\Rightarrow \quad \|\varepsilon_k\|_2 \le \underbrace{\|I-A\|_2}^{k}\, \|\varepsilon_0\|_2$$

$\hookrightarrow$ vogliamo $\|I-A\|_2 < 1$

Per studiare la norma della matrice:

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

DEF. $\rho(A) = |\lambda_1| = \max |\lambda_i(A)|$ autovalore di modulo massimo

RAGGIO SPETRALE DI A

e si ha:

se $\rho(A) < 1 \Rightarrow \|A\|_2 < 1 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$\rightsquigarrow$ basta studiare gli autovalori di A per sapere $\rho(A)$

($\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ def norma di matrice)

$\Rightarrow$ quindi: $\|\varepsilon_{k+1}\|_2 \le \rho(I-A)^k \|\varepsilon_0\|_2$

e lo schema converge se e solo se

$\rho(I-A) < 1$

quindi il RAGGIO SPETRALE fa le veci di $|g'(x)|$ in Picard

$\Rightarrow$ Abbiamo concluso l'analisi di convergenza di

$x_{k+1} = (I-A)x_k + b$

$\boxed{\text{CONVERGE} \Leftrightarrow \rho(I-A) < 1}$

$\rho(I-A) = |\lambda_1(I-A)| < 1$

$|1 - \lambda_1(A)| < 1$

$\boxed{0 < \lambda_1(A) < 2}$ → Condizione sugli autovalori di A

Cosa possiamo fare se non siamo in questa situazione?
Proviamo a modificare "il passo stile Picard" in modo da risolvere un problema equivalente e avere convergenza

$$x_{k+1} = x_k + r_k \qquad \text{con} \qquad r_k = b - Ax_k$$

↳ MODIFICA : Consideriamo una matrice P invertibile

$$x_{k+1} = x_k + \underbrace{P^{-1} r_k}$$

(non stiamo cambiando il problema: cerchiamo $r_k = 0 \iff P^{-1} r_k = 0$)

Quindi, possiamo risolverlo come:

$$x_{k+1} = x_k + P^{-1}(b - Ax_k)$$
$$\overset{!}{=} \underbrace{(I - P^{-1}A)}_{B} x_k + \underbrace{P^{-1}b}_{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = B x_k + q}$$

CLASSICO METODO ITERATIVO LINEARE E STAZIONARIO

$x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (invertibile) PRECONDIZIONATORE

NOTA: B e q <u>non</u> dipendono dall'indice di iterazione k

↳ Possiamo ripetere i passi di analisi della convergenza (in generale) e poi specificare la P per ottenere il metodo iterativo specifico

1) CONSISTENZA DI $x_{k+1} = B x_k + q$

Sostituisco $x^* = A^{-1} b$: $x^* = B x^* + q$

$$A^{-1} b = (I - P^{-1} A) A^{-1} b + P^{-1} b$$

$$\cancel{A^{-1} b} = \cancel{A^{-1} b} - P^{-1} \underbrace{(A A^{-1})}_{I} b + P^{-1} b$$

$$0 = - P^{-1} b + P^{-1} b = 0 \quad ✓$$

2) STABILITA'

$$x_{k+1} = B x_k + q$$
$$x^* = B x^* + q \quad \ominus$$
$$x_{k+1} - x^* = B (x_k - x^*) \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = B \varepsilon_k$$

Partendo da $\varepsilon_0 = x_0 - x^*$ (x_0 arbitrario) : $\varepsilon_k = B^k \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ passando alla norma : $\| \varepsilon_k \|_2 \leq \| B \|_2^k \| \varepsilon_0 \|_2$

Quindi : stabilità $\Leftrightarrow \| B \|_2^k < 1$

Passando al raggio spettrale : se $\rho(B) < 1 \Rightarrow \| B \|_2 < 1$ ✓

CONCLUSIONE : Dato uno schema lineare e stazionario

$$x_{k+1} = B x_k + q$$

lo schema converge (linearmente) se e solo se $\rho(B) < 1$.

↳ Dobbiamo trovare $B = I - P^{-1} A$ (quindi, in particolare, scegliere P) tale che $\rho(B) < 1$.

SCELTA DI P

IDEA : Trovare P tale che sia "facile" da invertire (abbiamo bisogno di P^{-1}) e che sia una "buona" approssimazione di A^{-1}

CASO ESTREMO : $P = A$

$$x_{k+1} = (\underbrace{I - A^{-1}A}_{=0}) x_k + A^{-1} b = A^{-1} b = x^*$$

$\hookrightarrow$ converge in 1 iterazione MA serve trovare A^{-1}

TRE SCHEMI

1) $\underline{P = I}$ ← METODO DI RICHARDSON (caso visto precedentemente)

$B = I - A$ ⇝ convergenza con

$$\rho(B) = \rho(I - A) = |\lambda_1(I - A)| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \lambda_1(A) < 2$$

2) $\underline{P = D}$, con D = matrice diagonale formata dalla diagonale di A

(Il precondizionatore contiene alcune informazioni della matrice A, e D^{-1} facile da calcolare)

METODO DI JACOBI

$$x_{k+1} = (I - D^{-1}A) x_k + D^{-1} b$$

$$= x_k + D^{-1}(b - A_k) = x_k + D^{-1} \underbrace{r_k}_{\text{residuo}}$$

$$B_J = I - D^{-1}A$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & a_{ij}/a_{ii} \\ & \ddots & \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_J = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & & -a_{ij}/a_{ii} \\ & \ddots & \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & 0 \end{bmatrix}$$

TEOREMA: Se la matrice A è diagonalmente dominante in senso stretto $\Rightarrow$ Jacobi converge

$$\rho(I - D^{-1}A) < 1$$

A diagonalmente dominante in senso stretto:

$$a_{ii} > 0 \qquad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Per l'implementazione: $x_{k+1} = (I - D^{-1}A)x_k + D^{-1}b$ moltiplico per D

$$D x_{k+1} = D x_k - A x_k + b$$

$$D x_{k+1} = (D - A) x_k + b$$

Schema per l'aggiornamento delle componenti di x_k:

$$x_{k+1,i} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_{k,j} \Big) \qquad i = 1, \dots, n$$

non prendo la diagonale

3) METODO DI GAUSS-SEIDEL

Consideriamo la decomposizione di A in:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = L + D + U =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & 0 \\ \vdots & a_{32} & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

quindi dove

$$L = \{ l_{ij} \} \qquad l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$D = \{ d_{ij} \} \qquad d_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$U = \{ u_{ij} \} \qquad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{P = L + D}$ METODO DI GAUSS-SEIDEL

$$B_{GS} = \left(I - (L+D)^{-1} A \right)$$

$$q = (L+D)^{-1} b$$

Facile da implementare:

$$x_{k+1} = \left(I - (L+D)^{-1} A \right) x_k + (L+D)^{-1} b$$

$$\stackrel{!}{=} x_k - (L+D)^{-1}(Ax_k - b)$$

$$(L+D)\,x_{k+1} = \cancel{(L+D)}\,x_k - (\cancel{L+D}+U)\,x_k + b$$

$$\Rightarrow \quad (L+D)\,x_{k+1} = -U x_k + b$$

$$\boxed{D\,x_{k+1} = -L\,x_{k+1} - U x_k + b}$$

L è triangolare inferiore (stretta)
quindi questo è noto

Schema (per componenti):

$$x_{k+1,i} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_{k+1,j} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_{k,j} + b_i \right] \qquad i=1,\dots,n$$

TEOREMA: se A è simmetrica e definita positiva

$\Rightarrow$ Gauss-Seidel converge

DEF. (PROPRIETA' BCO - BICICLICA E COERENTEMENTE ORDINATA)

La matrice A gode di questa proprietà se è trasformabile per permutazioni di righe e/o colonne in una matrice della forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} D_1 & M_1 \\ M_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

con D_1, D_2 diagonali.

$\Rightarrow$ in questo caso si ha: $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$

quindi: se Jacobi converge $\Rightarrow$ Gauss-Seidel converge

ESEMPIO.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e permutando con $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

sia righe che colonne

$$\Rightarrow \quad PAP = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

con $D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $D_2 = 2$

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $M_2 = [1 \ 1$

OSS. Tutte le matrici tridiagonali, o tridiagonali a blocc godono di questa proprietà

ESEMPIO

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che: A simmetrica $A = A^T$

A diagonalmente dominante (stretta)

$\Rightarrow A$ definita positiva

JACOBI : $x_{k+1} = (I - D^{-1}A)x_k + D^{-1}b$

$$D x_{k+1} = D x_k - A x_k + b$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$\leadsto$ esplicito il termine diagonale

$$\left\{ \quad -x_2 + 2x_3 = 3 \right.$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(3 + x_2^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(4 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(3 + x_2^{(k)}\right)$$

ITERAZIONE K DI JACOBI

esempio di iterazioni:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \to x^{(2)} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 7/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \dots$$

GAUSS - SEIDEL $\quad D x_{k+1} = -L x_{k+1} - U x_k + b$

tiene conto della L per usare le componenti aggiornate

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(3 + x_2^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(4 + x_1^{(k+1)} + x_2^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(3 + x_2^{(k+1)}\right)$$

Come visto nel capitolo 2: l'errore non si conosce

$\Rightarrow$ relazione tra errore e residuo

$Ax = b \qquad x^* = A^{-1}b$ soluzione esatta

x_k = soluzione approssimata (iterazione k)

$\varepsilon_k = x^* - x_k \in \mathbb{R}^n$ errore

$$\varepsilon_k = A^{-1}b - x_k$$
$$A\varepsilon_k = A(A^{-1}b) - Ax_k = b - Ax_k = r_k$$

residuo

(calcolabile)

Vogliamo usare il residuo al posto dell'errore per decidere quando interrompere le iterazioni:

$\|r_k\|_2 < TOL \Rightarrow x_k$ è una buona approssimazione di x^*

Verifichiamo che: se $r_k = b - Ax_k$ è piccolo

$\Rightarrow \varepsilon_k$ è piccolo

in norma

In particolare:

$$\text{se} \quad \frac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2} < TOL \overset{?}{\Longrightarrow} \frac{\|\varepsilon_k\|_2}{\|\varepsilon_0\|_2} < TOL$$

(e se consideriamo $x_0 = 0 \Rightarrow r_0 = b - Ax_0 = b$)

$$\varepsilon_k = x^* - x_k = A^{-1}b - x_k \Rightarrow A\varepsilon_k = b - Ax_k = r_k$$

$$\begin{cases} r_k = A\,\varepsilon_k \\ \varepsilon_k = A^{-1} r_k \end{cases}$$

↳ Passiamo alle norme:

$$\|r_k\|_2 \le \|A\|_2 \|\varepsilon_k\|_2 \qquad \forall k$$
$$\|\varepsilon_k\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \|r_k\|_2$$

quindi anche per $k=0$: $\|r_0\|_2 \le \|A\|_2 \|\varepsilon_0\|_2$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_0\|_2 \geq \frac{\|r_0\|_2}{\|A\|_2}$$

Quindi:

$$\frac{\|\varepsilon_k\|_2}{\|\varepsilon_0\|_2} \le \frac{\|A^{-1}\|_2 \|r_k\|_2}{\|r_0\|_2 / \|A\|_2} = \underbrace{\boxed{\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2}}_{K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2} \frac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2}$$

NUMERO DI
CONDIZIONAMENTO DI A

e vale che $\dfrac{\|\varepsilon_k\|_2}{\|\varepsilon_0\|_2} \leq \underline{\underline{K(A)}} \dfrac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2} < TOL$

se $K(A)$ è piccolo

⇒ Se $K(A)$ è grande, il sistema è MALCONDIZIONATO e anche se $\dfrac{\|r_k\|_2}{\|r_0\|_2} < TOL$ non si sa se vale anche per $\dfrac{\|\varepsilon_k\|_2}{\|\varepsilon_0\|_2}$

OSS. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\lambda_1(A^TA)}$

$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^TA)^{-1})}$

$\leadsto \quad \rho(A) = \lambda_{max} \leq \|A\|_2$

$\rho(A^{-1}) = 1/\lambda_{MIN} \leq \|A^{-1}\|_2$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \rho(A)\cdot\rho(A^{-1}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{MIN}} \leq \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Quindi: $\underline{K(A) \geq 1}$.

↳ se $K(A) \gg 1$ la matrice A è MALCONDIZIONATA