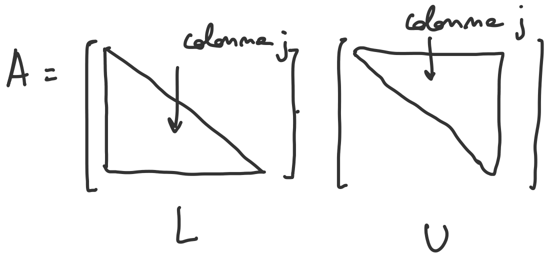
5D-Sistemi lineari-fattorizzazione LU, utilizzo e Choleski

mercoledì 8 maggio 2024 14:09

FORMULE COMPATTE DELLA FATTORIZZAZIONE LU (senza pivoting)

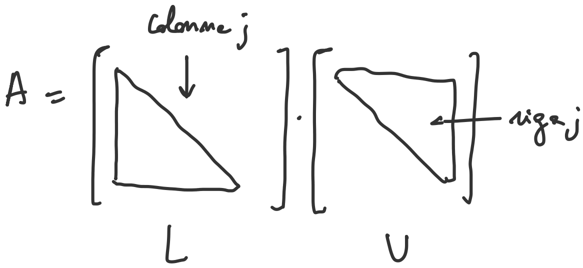
(A)

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \qquad i=1,\dots,j \\ l_{jj} &= 1 \\ l_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \right) / u_{jj} \qquad i=j+1,\dots,n \end{aligned}\right\} \; j=1,\dots,n$$



(B) Formule di GAUSS-DOOLITTLE

$$\left.\begin{aligned} u_{ji} &= a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}\, u_{ki} \qquad i=j,\dots,n \\ l_{jj} &= 1 \\ l_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj} \right) / u_{jj} \qquad i=j+1,\dots,n \end{aligned}\right\} \; j=1,\dots,n$$



(C) VARIANTE (modifica delle formule di Gauss-Doolittle)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & \ddots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & & * \\ & u_{22} & \\ 0 & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}} \overbrace{\overset{D}{\begin{bmatrix} u_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}} \overset{U'}{\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}}^{U} =$$

$$= \underset{L'}{\begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & l_{nn} \end{bmatrix}} \underset{U'}{\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}} = L'U'$$

variante della LU con

- L triangolare inferiore
- U triangolare superiore e diagonale unitaria

Formule compatte di Gauss - Crout

$$l_{i1} = a_{i1} \; ; \quad u_{1i} = a_{1i}/l_{11} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\left.\begin{aligned} & l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} && i = j, \ldots, n \\ & u_{ii} = 1 && \\ & u_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki} \right) / l_{jj} && i = j+1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \; j = 2, \ldots, n$$

SISTEMI LINEARI CON TERMINI NOTI MULTIPLI

Abbiamo m sistemi lineari : $\quad A x_i = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$

Due possibilità :

(1) calcolare 1 fattorizzazione LU della matrice A :

$$PA = LU \qquad (\text{costo } \Theta(n^3))$$

poi risolvere $\quad x_i = U^{-1}(L^{-1}Pb_i) \qquad i = 1, \dots, m$

costo: prodotto tra matrici e sistemi triangolari $\Theta(mn^2)$

(2) si considera la matrice aumentata "multipla":

$$[A \mid b_1 \dots b_m] \xrightarrow[\text{passi del metodo di Gauss}]{n-1} [U \mid y_1 \dots y_m]$$

poi risolvere m sistemi triangolari: $\quad U x_i = y_i$

per $i = 1, \dots, m$

CALCOLO DELL'INVERSA

Sappiamo che in generale il calcolo di A^{-1} è molto costoso: serve risolvere n sistemi lineari

$$A X = I \qquad \text{con} \qquad X = [x_1 \dots x_n] \qquad x_i \in \mathbb{R}^n$$

$$I = [e_1 \dots e_n] \qquad e_i \in \mathbb{R}^n$$

vettori della base canonica

IDEA. Sfruttiamo la fattorizzazione LU (per sistemi con termini noti multipli) per il calcolo di A^{-1}.

Con le due possibilità abbiamo:

$\boxed{1}$ Calcolare la fattorizzazione LU di A

$\Rightarrow \quad PA = LU$

La soluzione di $AX = I$ (è proprio $X = A^{-1}$)

è dato come :

$$A^{-1} = X = U^{-1}\left(L^{-1}(PI)\right) = U^{-1}\left(L^{-1}(P)\right)$$

$\boxed{2}$ Partendo dalla matrice aumentata :

$$[A \mid I] \xrightarrow[\text{passi di Gauss}]{n-1} [U \mid L^{-1}P]$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = X = U^{-1}(L^{-1}P)$$

CALCOLO DEL DETERMINANTE (sfruttando la fattorizzazione LU)

$$PA = LU$$

$$\Rightarrow \quad \det(PA) = \det(LU) \quad \leftarrow \text{proprietà del determinante}$$

$$\det(PA) = \det P \cdot \det A, \qquad \det(LU) = \det L \cdot \det U$$

Ricordiamo che : $\det P = (-1)^s$ con s numero scambi;

$$\det L = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} = 1$$

$$\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

costo $O(n^3)$ (della fattorizzazione)

FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKI

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SIMMETRICA $(A = A^T)$

Specifichiamo la fattorizzazione LU per A simmetrica e definita positiva:

$$A = LU \quad e \quad A = A^T$$

$$LU = (LU)^T = U^T L^T$$

$$\Rightarrow \quad L = U^T \, , \quad U = L^T$$

FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKI: Trovare L triangolare inferiore (non a diagonale unitaria) tale che

$$A = LL^T$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 5 \\ 15 & 58 & 17 \\ 5 & 17 & 41 \end{bmatrix} = A^T$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

ho 6 valori da trovare:

$$\rightsquigarrow \quad l_{11}^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{25} = 5$$

$$\rightsquigarrow \quad l_{11} \cdot l_{21} = 15 \quad \Rightarrow \quad l_{21} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\rightsquigarrow \quad l_{11} \cdot l_{31} = 5 \quad \Rightarrow \quad l_{31} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad l_{21} l_{21} + l_{22} \cdot l_{22} = 58 \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{58 - l_{21}^2} = 7$$

$$\rightsquigarrow \quad l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} = 17 \quad \Rightarrow \quad l_{32} = \frac{17 - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = 2$$

$$\rightsquigarrow \quad l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 41 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{41 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = 6$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(verificare che $LL^T = A$)

Legame con fattorizzazione $LU = L \Delta U'$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{D = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}} \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}}_{L''} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}}_{U'' = (L'')^T}$$

FORMULA COMPATTA

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1}/l_{11} \qquad i = 2, \to n$$

$$\left.\begin{aligned} l_{jj} &= \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \right)^{1/2} \\ l_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{jj} \qquad i = j+1, \to n \end{aligned}\right\} \quad j = 2, \to n$$

NOTA. costo computazionale $\frac{1}{3} n^3$ (metà del costo LU) $= \theta$

OSS.

Il teorema visto per esistenza e unicità della fattorizzazione LU si specializza al caso simmetrico imponendo i determinanti dei minori principali > 0.

Questa proprietà equivale a:

$A = A^T$ e definita positiva $\Rightarrow$ $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Riassumendo, se $A = A^T$:

1) verifico se A è diagonalmente dominante (abbiamo visto che questo implica l'esistenza di LU)

↳ se SI: $A = LL^T$ esiste

2) $\hookrightarrow$ se NO: verifico che tutti i minori principali abbiano det > 0 $\Rightarrow$ $A = LL^T$ esiste

ALTRIMENTI: non posso calcolare la fattorizzazione di Choleski (otterrei valori negativi sotto la radice quadra