

FATTORIZZAZIONE LU

Voglio trovare le matrici L e U per cui:

$$A = L \cdot U \quad \text{dove}$$

- L triangolare inferiore a diagonale unitaria

$$l_{ii} = 1 \quad \forall i$$

$$l_{ij} = 0 \quad \text{per } i < j \quad \left(\begin{array}{l} \text{condizione delle} \\ \text{Triangolari inferiori} \end{array} \right)$$

- U triangolare superiore

$$u_{ii} \neq 0, \quad u_{ij} = 0 \quad \text{per } i > j \quad \left(\begin{array}{l} \text{condizione delle} \\ \text{Triangolari superiori} \end{array} \right)$$

$$\boxed{A} = \boxed{L} \cdot \boxed{U}$$

Come si calcolano L e U ? **METODO DI GAUSS**
(senza pivoting)

ESEMPIO. (conto numerico implementabile)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Vogliamo calcolare
 L e U : $A = L \cdot U$

Possibili operazioni :

- * moltiplicazione per una costante non nulla
- * somma di due righe

$$1) \quad A^{(1)} = L_1 \cdot A \quad \text{tale che} \quad a_{i,1}^{(1)} = 0 \quad i > 1$$

(cioè: il primo passo è annullare tutti gli elementi della prima colonna sotto la diagonale)

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A =$$

le matrici L_i sono la matrice identità con elementi $\neq 0$ nelle posizioni che "voglio modificare"

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2) A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = L_2 L_1 A$$

(azzerare gli elementi sotto la diagonale della colonna 2)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3) A^{(3)} = L_3 A^{(2)} = L_3 L_2 L_1 A$$

(azzerare l'elemento sotto diagonale della colonna 3)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

U

⇒ alla fine di questi 3 passi si ha:

$$U = \underbrace{L_3 L_2 L_1}_{L^{-1}} A \quad \text{voglio } A = LU$$

$$L^{-1} = L_3 L_2 L_1 \Rightarrow L = (L_3 L_2 L_1)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$$

quindi:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per l'inversa di L_k , vale in generale!

quindi:

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($\uparrow$ facilmente implementabile)

IN GENERALE: la generica operazione per trovare un elemento di L :
$$l_{ik} = \frac{A^{(k)}(i,k)}{A^{(k)}(k,k)}$$

Questo algoritmo funziona solo se per ogni

passo si ha $A^{(k)}(k,k) \neq 0$. $\rightarrow$ altrimenti si deve utilizzare il PIVOTING

In questo caso si considera come operazione possibile nel metodo di Gauss anche lo scambio tra righe.

$\hookrightarrow$ Una volta calcolata $A = LU$ risolvere il sistema lineare è facile:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad L \underbrace{U}_{y} x = b$$

$$\textcircled{1} Ly = b$$

2 sistemi triangolari

$$\textcircled{2} Ux = y$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^L \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ \dots \end{bmatrix}}^{\text{dato } b =}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 30 \end{bmatrix}$$

↳ sostituzione in avanti:

$$y_1 = 4$$

$$2y_1 + y_2 = 11 \Rightarrow y_2 = 3$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 29 \Rightarrow y_3 = 4$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 = 30 \Rightarrow y_4 = 2$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_y$$

↳ sostituzione all'indietro

$$2x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 1$$

$$2x_3 + 2x_4 = 4 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In generale : se consideriamo i passi visti sopra

direttamente nella risoluzione del sistema lineare $Ax = b$

IDEA : a partire da $Ax = b$ si possono costruire dei sistemi equivalenti e in $(n-1)$ passi si ottiene un sistema triangolare superiore (risoluzione con sostituzione all'indietro)

$$\underbrace{A}_{A^{(0)}} x = \underbrace{b}_{b^{(0)}}$$

⚡

Possiamo considerare una matrice "a tre bande",

$$\begin{aligned}
 & \Downarrow \\
 & \underbrace{L_1 A}_{A^{(1)}} x = \underbrace{L_1 b}_{b^{(1)}} \\
 & \Updownarrow \\
 & \underbrace{L_2 A^{(1)}}_{A^{(2)}} x = \underbrace{L_2 b^{(1)}}_{b^{(2)}} \\
 & \vdots \\
 & \underbrace{A^{(m-1)}}_U x = \underbrace{b^{(m-1)}}_y
 \end{aligned}$$

soluzione di $Ly = b$

ma non conviene
applicare le operazioni direttamente
a b

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1m}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1}^{(0)} & & & a_{mm}^{(0)} & b_m^{(0)} \end{array} \right]$$

↓ PASSO 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1m}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right]$$

PASSO k (da $A^{(k-1)}$ a $A^{(k)}$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & \dots & \dots & a_{1m}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & a_{mk}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & a_{mm}^{(k-1)} & b_m^{(k-1)} \end{array} \right]$$

PIVOT
(passo k)

voglio azzerare
questa porzione

Operazioni da eseguire:

FOR $k = 1 : m - 1$

→ dato k , per ottenere $A^{(k)}$ e $b^{(k)}$

FOR $i = k + 1 : m$

← ciclo sulle righe da considerare

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

— pivot

~ componenti della l

$$a_{kk}^{(k-1)}$$

FOR $j = k : m$ ← ciclo sulle colonne

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} a_{kj}^{(k-1)}$$

END FOR

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik} b_k^{(k-1)} \quad \text{~ modifica a } b$$

END FOR

END FOR

Alle fine $A^{(m-1)}$ sarà proprio la U cercata.

ESEMPIO

Risolviamo :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 17 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 3 \end{bmatrix}}_b$$

da $(A^{(0)} | b^{(0)})$

$K=1$ $l_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{4}{2} = 2$

$l_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -1$

→ per la riga 2: $II^{(1)} = II^{(0)} - l_{21} I^{(0)}$
 per la riga 3: $III^{(1)} = III^{(0)} - l_{31} I^{(0)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{array} \right]$$

$A^{(1)} \quad b^{(1)}$

$K=2$ $l_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{2}{1} = 2$

per la riga 3: $\text{III}^{(2)} = \text{III}^{(1)} - l_{32} \text{II}^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{A^{(2)}} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{b^{(2)}}$
 $\quad\quad\quad U \quad\quad\quad y$

$\Rightarrow$ la soluzione di $Ax = b$ equivale a quella di $Ux = y$:

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$x_2 + 4x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

COSTO COMPUTAZIONALE

- riduzione a sistema triangolare $\mathcal{O}(n^3)$
 - riduzione sistema triangolare $\mathcal{O}(n^2)$
- $\Rightarrow$ complessivo $\mathcal{O}(n^3)$.

Come osservato prima: tutti gli elementi $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ (pivot) per poter applicare il metodo.

TEOREMA. Se A è tale per cui tutti i minori principali di dimensione da 1 a n

hanno determinante $\neq 0$,

cioè se $\det(A_{(k)}) \neq 0 \quad k=1, \dots, m$

Allora esistono uniche L e U tali
che $A = LU$.

MATRICI
MINORI
PRINCIPALI
DI A

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & & & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

NOTA: per A simmetrica, definita positiva e a
dominanza diagonale stretta $\Rightarrow$ vale il teorema sopra.

$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii} & \dots & a_{im} \\ & & & \ddots & \\ & & & & \vdots \end{bmatrix}$$

DOMINANZA DIAGONALE STRETTA
(per righe)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \quad i=1, \dots, m$$

Comunque può accadere che $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ (per un certo k)
anche se A è invertibile.

$\Rightarrow$ METODO DI GAUSS CON PIVOTING

ESEMPIO

$$[A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

passo 1

$$l_{21} = \frac{2}{1} = 2$$

$$l_{31} = -1$$

$$[A^{(1)} | b^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$a_{22}^{(1)} = 0 !$$

possiamo scambiare le ultime due righe (applicando anche alle componenti di b , si ottiene un sistema equivalente):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{riga 1} \\ \text{riga 3} \\ \text{riga 2} \end{array}$$

sistema triangolare $\Rightarrow Ux = y$

$$x_3 = 1$$

$$-x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -8$$

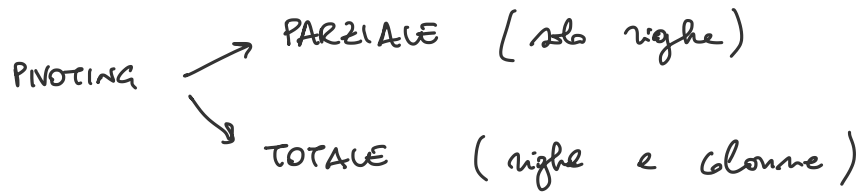
$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PIVOTING

REGOLA PRATICA: quando si trova un pivot nullo, allora scambio opportunamente righe e/o colonne per poter completare

il metodo di Gauss.

Ci sono due possibili strategie:



Pivoting PARZIALE:

Se $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ $\otimes$:

1) si determina l'indice r (della riga), $r \geq k$,

tale che:

$$|a_{rk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

(sceglie l'elemento
massimo in valore assoluto)

$$2) \left[A^{(k-1)} \mid b^{(k-1)} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & & & & b_1^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{kk}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & a_{rk}^{(k-1)} & b_r^{(k-1)} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(k-1)} & b_n^{(k-1)} \end{array} \right]$$

Scambio riga k con riga r

$\otimes$ NOTA

Lo scambio ha senso anche se il pivot $a_{kk}^{(k-1)}$ è molto piccolo.

Infatti: nel calcolo di $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$, e

se dividiamo per un numero molto piccolo si ha una possibile propagazione dell'errore.

Ricordiamo che lo scambio di righe è un'operazione elementare e non cambia la soluzione del sistema.

Pivoting TOTALE: si opera sia uno scambio di righe che di colonne

NOTA. In questo caso (a causa dello scambio di colonne)

non si ottiene un sistema equivalente, si deve tenere traccia degli scambi.

⇒ gestione più complicata e costosa

ESEMPIO

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 4 \end{array} \right] \quad Ax = b \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -5x_1 - x_2 = 4 \end{array} \quad \leadsto \text{soluzione} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad\quad}_A \quad \underbrace{\quad\quad}_b$

scambio colonna 1 e colonna 2 :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & 4 \end{array} \right]$$

⇒ soluzione $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

In questo caso: si sceglie la riga e la colonna

con l'elemento di modulo massimo

della "sottomatrice attiva"

2	1	1	0
0	1	1	1
0	3	5	5
0	4	6	8

pivot → (1) (elemento di modulo massimo)

sottomatrice "attiva" (8)

Per operare gli scambi di righe e/o colonne si utilizzano

le MATRICI DI PERMUTAZIONE (P)

PA → scambio righe

AP → scambio colonne

Proprietà delle matrici di permutazione

- matrici di permutazione ELEMENTARI si ottengono scambiando due righe della matrice identità (P_{ij} = scambio riga i con riga j)

es. $P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ scambio riga 2 e 3

- matrici di permutazione GENERALI si ottengono moltiplicando matrici di permutazione elementari

$$P = P_{23} \cdot P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 scambi di righe

- P è una matrice ortogonale, cioè $P^{-1} = P^T$
- $\det(P) = (-1)^S$ dove S è il numero di scambi di 2 righe

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{11} è un pivot ≈ 0 , voglio operare una permutazione.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = AP = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-20} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{scambio di colonne}$$

Vediamo come usare le matrici di permutazione nella

risoluzione del sistema lineare:

$$Ax = b \quad \text{con pivoting} \Rightarrow \text{ottergo } \tilde{A} = P_1 A P_2$$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \tilde{A} y = \underline{c} \quad (\text{risolvo questa versione})$$

$$\begin{aligned} P_1 A P_2 y &= c \\ \underbrace{P_1^T P_1}_{I} A P_2 y &= P_1^T c \quad [\text{nota: } P_i^T = P_i^{-1}] \\ A P_2 y &= P_1^T c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = P_2 y} \quad \text{e} \quad b = P_1^T c \Rightarrow \underline{c = P_1 b}$$

↑
con recupero la
soluzione x

In generale, durante il metodo di Gauss con pivoting (parziale)

$P_1, \dots, P_{m-1}$ matrici di permutazione utilizzate negli $m-1$ passi di Gauss (se non ci sono stati scambi per un passo k : $P_k = I$)

$P = P_{m-1} \cdot \dots \cdot P_1$ matrice di permutazione finale

$\Rightarrow$ vale $\underbrace{PA}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{con righe} \\ \text{modificata}}} = L \underbrace{U}_{\substack{\text{fattorizzazione senza pivoting di PA}}}$

Nota. U corrisponde a $A^{(m-1)}$ dopo $m-1$ passi di Gauss con pivoting
 $b^{(m-1)}$ è la soluzione implicita di $Ly = Pb$.

ESEMPIO.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Utilizziamo pivoting parziale:

$$\left[A^{(0)} \mid b^{(0)} \right] \quad A^{(0)} = A, \quad b^{(0)} = b$$

$\Updownarrow$

PASSO 1

(*) $\left[A^{(1)} \mid b^{(1)} \right]$

definiamo P_1 in modo che il pivot di $A^{(0)}$ sia l'elemento di valore assoluto massimo $\Rightarrow$ scambio riga 1 e 2.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_1 \left[A^{(0)} \mid b^{(0)} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & 1 & 7 & 3 \end{array} \right]$$

e ora applichiamo le operazioni per annullare i valori sotto la diagonale:

$$l_{21} = \frac{1}{2} \quad l_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$L_1 P_1 \left[A^{(0)} \mid b^{(0)} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -3 \\ 0 & \frac{5}{2} & 12 & 17 \end{array} \right] = \left[A^{(1)} \mid b^{(1)} \right]$$

PASSO 2

(*) scelgo $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ per avere $\frac{5}{2}$ come pivot in posizione (2,2).

$$P_2 \left[A^{(1)} \mid b^{(1)} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 10 & 28 \\ 0 & \frac{5}{2} & 12 & 17 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -3 \end{array} \right]$$

e ora applico il secondo passo di Gauss:

$$l_{32} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

$$L_2 P_2 [A^{(1)} | b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 10 \\ 0 & \frac{5}{2} & 12 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{array} \right] = [A^{(2)} | b^{(2)}]$$

$$\Rightarrow U = A^{(2)} \quad y = b^{(2)} \quad \Rightarrow \text{solve } Ux = y \quad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$