

SISTEMI DI IMMEDIATA RISOLUZIONE• SISTEMI DIAGONALI

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & d_m \end{bmatrix} \quad \text{e vogliamo risolvere } Dx = b$$

La soluzione esiste unica $\Leftrightarrow d_i \neq 0 \quad \forall i$

Immediata risoluzione:

$$x = D^{-1}b = \begin{bmatrix} b_1/d_1 \\ b_2/d_2 \\ \vdots \\ b_m/d_m \end{bmatrix} \quad \text{richiede } \frac{m \text{ operazioni}}{(\text{FINITO NUMERO})}$$

• SISTEMI TRIANGOLARI

(a) TRIANGOLARE SUPERIORE $Ux = b$

$$\text{con } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ & u_{22} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & u_{mm} \end{bmatrix} \quad \det(U) = \prod_{i=1}^m u_{ii}$$

$u_{ii} \neq 0 \quad \forall i$ garantisce l'invertibilità

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{I} \\ \leftarrow \text{II} \\ \leftarrow \text{III} \end{matrix}$$

Soluzione: sostituzione all'indietro

$$\text{III} \quad -1 \cdot x_3 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{b_3}{u_{33}} = 4$$

$$\text{II} \quad 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 6 \quad \text{e inserendo il risultato per } x_3:$$

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{6 - 4 \cdot 4}{2} = -5$$

$$\text{I} \quad 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0 \quad \text{e inserendo i risultati}$$

risultati per x_3 e x_2 :

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{12} \cdot x_2 - u_{13} x_3}{u_{11}} = \frac{0 - (-2)(-5) - (-1)4}{3} = -2$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \left(\text{calcolando } Ux \stackrel{?}{=} b \text{ si può verificare la soluzione} \right)$$

ALGORITHM GENERALE

$$Ux = b \quad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{m-1,m-1} & u_{m-1,m} \\ & & & & u_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$1) \quad x_m = \frac{b_m}{u_{mm}}$$

$$2) \quad x_{m-1} = \frac{b_{m-1} - u_{m-1,m} \cdot x_m}{u_{m-1,m-1}}$$

i

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^m u_{ik} x_k}{u_{ii}} \quad \text{per } i = m-1, m-2, \dots, 1 \quad (\text{"all'indietro"})$$

PSEUDOCODICE

INPUT : U, b

OUTPUT : x

$$x(m) = b(m) / U(m,m)$$

FOR $i = m-1 : -1 : 1$

 sonna = 0

 FOR $k = i+1 : m$

$$\quad \text{sonna} = \text{sonna} + U(i,k) \cdot x(k)$$

 END FOR

$$x(i) = (b(i) - \text{sonna}) / U(i,i)$$

END FOR

(b) TRIANGOLARE INFERIORE

$$Lx = b$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{m1} & \dots & & l_{mm} \end{bmatrix}$$

$l_{ii} \neq 0 \quad \forall i$
garantisce l'invertibilità

$$(\det(L) = \prod_{i=1}^n l_{ii})$$

Soluzione per $Lx = b$: SOSTITUZIONE IN AVANTI

$$x_1 = b_1 / l_{11}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21} \cdot x_1}{l_{22}}$$

$\vdots$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k}{l_{ii}}$$

$i = 2, \dots, n$
("in avanti")

COSTO COMPUTAZIONALE per i sistemi triangolari:

$$\text{operazioni} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \mathcal{O}(n^2)$$

• SISTEMI ORTOGONALI ($Q^{-1} = Q^T$)

$$Qx = b \quad \Leftrightarrow \quad x = Q^T b$$

↳ solo costo di
matrice x vettore
 $\mathcal{O}(n^2)$

IDEA per i metodi diretti

Trovare una fattorizzazione di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$A = BC$, con $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ due matrici più
semplici.

Quindi:

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{BC}_y x = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} By = b \\ Cx = y \end{cases} \quad \text{due sistemi lineari
semplici da risolvere}$$

PROCEDURA GENERALE

- 1) Calcolare la fattorizzazione $A = BC$
- 2) risolvere $By = b$
- 3) risolvere $Cx = y$

→ il maggiore costo computazionale si ha nel passo 1.

POSSIBILI FATTORIZZAZIONI

- 1) METODO DI GAUSS o FATTORIZZAZIONE LU

$$A = LU \quad \text{con} \quad \begin{aligned} L &= \text{triangolare inferiore} \\ U &= \text{triangolare superiore} \end{aligned}$$

- 2) METODO DI CHOLESKI (per A simmetrica)

$$A = LL^T \quad \text{con} \quad L = \text{triangolare inferiore}$$

- 3) FATTORIZZAZIONE QR

$$A = QR \quad \text{con} \quad \begin{aligned} Q &= \text{matrice ortogonale} \\ R &= \text{triangolare superiore} \end{aligned}$$

