

CAPITOLO 5 : RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

$$A x = b$$

Motivazioni. I sistemi lineari possono comparire nella risoluzione numerica di vari problemi: problemi di interpolazione/approssimazione, risoluzione di sistemi di eq. nonlineari, discretizzazione di equazioni alle derivate parziali

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$A = \{ a_{ij} \} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \text{ (indice righe)} \\ j = 1, \dots, m \text{ (indice colonne)} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & | \\ \vdots & & & | \\ a_{m1} & \dots & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

qui consideriamo
MATRICI QUADRATE ($m=n$)

$$x \in \mathbb{R}^m$$

$$x = \{ x_i \} \quad i = 1, \dots, m$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

$$b = \{ b_i \} \quad i = 1, \dots, m$$

* Forme particolari delle matrici A:

* MATRICE SIMMETRICA $A = A^T$

A trasposta

$$A^T = \{ a_{ji} \}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

* MATRICE DEFINITA POSITIVA

$$x^T A x > 0 \quad \forall \underline{x \neq 0}$$

dove

$$x \in \mathbb{R}^m \text{ è vettore nullo } x = 0$$

$x = \{x_i\}$ con $x_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$
 (analogamente per $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice nulla)
 se $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$
 $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ significa che $x_i \neq 0$ per
 almeno un indice i .

* MATRICE DIAGONALE

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & & d_n \end{bmatrix}$$

* MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & & & a_{mm} \end{bmatrix}$$

questa parte ha solo componenti = 0

(analogamente si definisce la TRIANGOLARE SUPERIORE)

* MATRICE INVERSA A^{-1} ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

* MATRICE ORTOGONALE se $A^{-1} = A^T$

Operazioni e proprietà matrici quadrate:

$$AB \neq BA \quad (\text{moltiplicazione NON commutativa})$$

$$A + B = B + A$$

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + AC \neq (B+C)A = BA + CA$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Autovalori e Autovettori

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrata, lo scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ e il vettore $u \in \mathbb{C}^n, u \neq 0$, sono AUTOVALORE e AUTOVETTORE di A se

$$A u = \lambda u \quad (\text{DEF})$$

Equivale a :

$$(A - \lambda I_n) u = 0, \text{ e } \exists u \neq 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

matrice
identità della
stessa dim di A

determinante

$$\det(A - \lambda I_n) = P_n(\lambda) = \text{polinomio caratteristico di } A$$

(polinomio di grado n)

$$\left\{ \begin{aligned} &= \lambda^n + \det A \lambda^{n-1} + \dots + \text{tr}(A) = 0 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{traccia di } A \\ &\quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned} \right.$$

- le n radici di $P_n(\lambda)$ sono gli autovalori di $A \rightarrow \lambda_i$, non necessariamente distinti

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

- gli autovettori corrispondenti si trovano risolvendo

$$(A - \lambda_i I_n) u_i = 0$$

e sono definiti a meno di una costante moltiplicativa

CONVENZIONE: ordiniamo gli autovalori dal più grande

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Risoluzione di sistemi lineari

$Ax = b$ ammette soluzione unica se e solo se

(le seguenti sono equivalenti)

- $\det(A) \neq 0$
- rango di A è uguale a n (massimo)
- nucleo di A : $\text{Ker}(A) = \{0\}$

SPAZIO NULLO o KERNEL di A

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

IMMAGINE o RANGE di A

$$\text{Im}(A) (= \text{Ran}(A)) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \neq 0\}$$

Rango di A = dimensione di $\text{Im}(A)$

PROPRIETÀ: $\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = n$

- $x \mapsto Ax$ è una funzione biettiva
- A invertibile $\Leftrightarrow$ esiste A^{-1} tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- tutti gli autovalori di A sono diversi da 0

$\Rightarrow$ Quindi: Se conosciamo A^{-1} possiamo calcolare x

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b$$

NEL CALCOLO NUMERICO: A^{-1} NON viene mai calcolata!



Troppo costoso: per calcolare A^{-1} servirebbe risolvere n sistemi lineari

$$Av = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

COSTO COMPUTAZIONALE:

- si contano le operazioni aritmetiche elementari (+, -, *, /) svolte all'interno di un calcolo
- notazione utilizzata è $\Theta(\cdot)$ (Θ grande di)

es. $\Theta(n^2)$ operazioni

$\Leftrightarrow$ il numero di operazioni, per n grande, si comporta come una costante moltiplicativa per n^2

ESEMPIO:

- $A + B$, con $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, richiede $\Theta(n^2)$ operazioni
- prodotto scalare $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ richiede n moltiplicazioni e $n-1$ addizioni $\Rightarrow 2n-1$ operazioni $= \Theta(n)$
- $A \cdot B$ richiede n^2 prodotti scalari (di vettori di $\mathbb{R}^n$) $\Rightarrow n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2 = \Theta(n^3)$ operazioni

APPROCCIO NUMERICO per risolvere $Ax = b$

- 1) METODI DIRETTI (se la dim di A è piccola - $n \leq 10^5$)
- 2) METODI ITERATIVI

