

CALCOLO NUMERICO

Ing. chimica e dei materiali Canale A - A.A. 2023-24

Esercizi: Integrazione numerica

Esercizio 1. Si vuole calcolare:

$$I = \int_a^b x^2 e^{-x} dx$$

con $[a, b] = [0, 2]$.

1. Determinare il valore approssimato di I con il metodo dei Trapezi suddividendo l'intervallo in 2 sottointervalli uguali.
2. Determinare il valore approssimato di I con il metodo di Cavalieri Simpson applicato all'intero intervallo di integrazione.
3. Determinare il valore approssimato di I con il metodo di Gauss-Legendre a tre punti d'appoggio, ricordando che i valori dei pesi e dei nodi nell'intervallo $[-1, 1]$ sono: $w_0 = w_2 = 5/9$, $w_1 = 8/9$, $\hat{x}_0 = -\sqrt{3/5}$, $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = \sqrt{3/5}$.
4. Calcolare l'errore esatto commesso nei tre casi ($R(f) = |I - I_n|$)

Riportare i risultati utilizzando una notazione in virgola mobile normalizzata con almeno 6 cifre decimali.

Svolgimento. L'integrale vero vale:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 e^{-x} dx &= \text{(per parti 2 volte)} \\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)|_0^2 = 2 - 10e^{-2} = 0.646647 \end{aligned}$$

1. Metodo dei Trapezi:

$$I \approx \frac{2}{2} (0 + e^{-1} + 2e^{-2}) = 0.638550$$

Errore metodo dei Trapezi:

$$|R_T(f)| = |0.638550 - 0.646647| = 0.80970 \times 10^{-2}$$

2. Metodo di Cavalieri Simpson:

$$I \approx \frac{2}{6} (0 + 4e^{-1} + 4e^{-2}) = 0.670953$$

Errore metodo CS:

$$|R_{CS}(f)| = |0.670953 - 0.646647| = 0.24306 \times 10^{-1}$$

3. Metodo di Gauss Legendre:

Trasformazione dell'intervallo:

$$x_0 = 1 - \sqrt{3/5} = 0.225403; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 1 + \sqrt{3/5} = 1.77460 \times 10^1$$

Calcolo integrale:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^2 w_k f\left(\frac{b-a}{2} \hat{x}_k + \frac{b+a}{2}\right) = \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^2 w_k f(x_k) \\ &= \frac{5}{9} f(0.225403) + \frac{8}{9} f(1) + \frac{5}{9} f(1.77460) = 0.646173 \end{aligned}$$

Errore metodo di GL:

$$|R_{GL}(f)| = |0.646173 - 0.646647| = 0.473738 \times 10^{-3}$$

Esercizio 2. Si vuole trovare il valore dell'intergrale:

$$I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

1. calcolare l'approssimazione I_1 di I con il metodo dei trapezi;
2. calcolare l'approssimazione I_2 di I con il metodo di Cavalieri Simpson;
3. trovare l'errore esatto commesso nei due casi e spiegare perchè il comportamento tra i due schemi è così diverso.

Svolgimento.

1. $I_1 = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{\pi}{2} [f(0) + f(\pi)] = 0$
2. $I_2 = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = \frac{\pi}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) \right] = 0.435382.$
3. Integrale esatto: $I = 0.521607.$

Errori:

$$R_1 = 0.521607 \quad R_2 = 0.086225$$

I punti di appoggio per i Trapezi cadono tutti dove $f(x)$ è zero.