

Pb. Calcolare $I_m \simeq I = \int_a^b f(x) dx$

FORMULE DI QUADRATURA: $I_m = \sum_{i=0}^m A_i^{(m)} f(x_i)$

$$I = I_m + R_m(f)$$

* INTERPOLAZIONE POLINOMIALE: usare la libertà di scelta dei punti $(x_i, f(x_i))$ in modo da minimizzare il numero di punti dove valutare f .

• Con le formule di Newton-Cotes il grado di

esattezza polinomiale è (numero punti - 1)

$$f(x) = p_m(x) + E_m(x) \Rightarrow I_m \text{ è esatto per funzioni in } P_m$$

oss. Si usano punti equispaziati

FORMULE DI QUADRATURA DI GAUSS (x_i NON EGISPAZIATI)

Idea: usando $m+1$ punti di appoggio, NON equispaziati, voglio ottenere formule di quadrature esatte per polinomi di grado $m > n$.

$$I_m = \sum_{i=0}^m A_i^{(m)} f(x_i) \quad \text{ho libera sia la scelta dei pesi che la scelta dei nodi}$$

$\Rightarrow$ posso imporre $2(m+1)$ condizioni.

Formule di Gauss: si ottiene esattezza sui polinomi P_{2m+1} , massimo grado di precisione possibile! (Formule su punti ottimali)

Usiamo i polinomi di interpolazione di Hermite: si usano informazioni

ma su $f(x)$ che su $f'(x)$ mi punti di appoggio x_i ($m+1$ punti x_i):

$$f(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^m \beta_i(x) f'(x_i) + E_{2m+1}(x)$$

polinomio di grado $2m+1$

Polinomi di Hermite

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = [1 - (x-x_i)^2 L_i^{(m)'}(x_i)] L_i^{(m)2}(x) \\ \beta_i(x) = (x-x_i) L_i^{(m)1}(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ punti di appoggio : $\{(x_i, f(x_i))\} \cup \{(x_i, f'(x_i))\}$
 $2m+2$ punti

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^m \int_a^b \alpha_i(x) f(x_i) dx + \sum_{i=0}^m \int_a^b \beta_i(x) f'(x_i) dx + R_{2m+1}(f) = \\ &= \sum_{i=0}^m f(x_i) \underbrace{\int_a^b \alpha_i(x) dx}_{A_i^{(m)}} + \sum_{i=0}^m f'(x_i) \underbrace{\int_a^b \beta_i(x) dx}_{B_i} + R_{2m+1}(f) \end{aligned}$$

quindi:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^m \underbrace{A_i^{(m)} f(x_i)}_{\substack{\uparrow \\ \text{utilizziamo questa} \\ \text{parte come formula}}} + \sum_{i=0}^m \underbrace{B_i f'(x_i)}_{\substack{\uparrow \\ \text{utilizziamo queste} \\ \text{parte come condizione} \\ \text{per definire } x_i \text{ } i=0, \dots, m}} + R_{2m+1}(f)$$

• Scegliamo x_i in modo che

$$B_i = \int_a^b \beta_i(x) dx = \int_a^b (x-x_i) L_i^{(m)1}(x) dx = 0$$

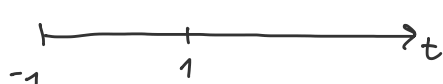
$\uparrow$
sono $m+1$ condizioni per definire x_i

Quindi: x_i sono valori opportuni (dati precalcolati - tabelle)

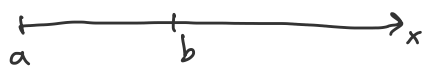
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^m A_i^{(m)} f(x_i) + R_{2m+1}(f)$$

L $\frac{1}{a}$ 120

Si trovano tabulati i valori di pesi e ascisse nell'intervallo $[-1, 1]$
 (es. Tabella 7.1 pag. 325 - libro) che poi vanno riscalati su $[a, b]$.



$$x = \alpha t + \beta$$



$$\begin{cases} a = -\alpha + \beta \\ b = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{a+b}{2} \\ \alpha = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^m w_i f\left(\frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

(t_i, w_i) ascisse e pesi dei tabulati

ESEMPIO. Ricaviamo la formula del punto medio: FORMULA DI GAUSS
 A 1 PUNTO

Trovare la migliore approssimazione per calcolare l'integrale
 con 1 solo punto di appoggio

Formula: $I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) w_0 f(x_0)$

Trovare w_0 e x_0 che massimizza l'estremità polinomiale
 $\Rightarrow$ Ci sono 2 incognite, servono due condizioni

Nell'esempio consideriamo $[a, b] = [-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \underbrace{\int_{-1}^1 p_1(x) dx}_{\parallel} + \int_{-1}^1 E_1(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 p_1(x) dx = w_0 \overbrace{(Ax_0 + B)}^{p_1(x_0)}$$

verificare
esistenza su
polinomi di
grado 1 $\rightarrow \int_{-1}^1 (Ax + B) = A \frac{x^2}{2} + Bx \Big|_{-1}^1 = \frac{A}{2} + B - \frac{A}{2} + B = 2B$

$$\Rightarrow 2B = (Ax_0 + B)w_0 = A(x_0 w_0) + Bw_0$$

Quindi : $x_0 w_0 = 0 \quad w_0 = 2$

$$\boxed{\begin{matrix} x_0 = 0 \\ w_0 = 2 \end{matrix}}$$

FORMULA DI GAUSS A 1 PUNTO
(FORMULA DI PUNTO MEDIO)

$$I = I_{pm} + E_{pm} = \frac{b-a}{2} \overset{w_0}{2} f\left(\overset{x_0 \text{ risoluto}}{\frac{b+a}{2}}\right) + E_{pm}$$

$$= (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right) + E_{pm}$$

$\Rightarrow$ formula esatta su
polinomi di grado 1
con solo 1 punto di
appoggio

ESERCIZIO

$$I = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx = 0.646647$$

- 1) Formula dei Trapezi con 2 sottointervalli (I_T)
- 2) Formula di Cavalieri-Simpson con 1 sottointervallo (I_{CS})
- 3) Metodo di Gauss-Legendre a 3 punti : (I_{GL})

$$x_0 = -\sqrt{3/5} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{3/5}$$

$$w_0 = w_2 = 5/9 \quad w_1 = 8/9$$

- Calcolare l'errore rispetto al valore dell'integrale esatto I

