4A-Integrazione numerica

mercoledì 10 aprile 2024 17:04

INTEGRAZIONE (o QUADRATURA) NUMERICA

Pb. Calcolare numericamente l'integrale definito

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Come?

1). Analiticamente utilizzando la primitiva F di f

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

PROBLEMI: * F non si conosce sempre

* Il calcolo di $F(b) - F(a)$ può risultare in cancellazione numerica se $F(b) \simeq F(a)$

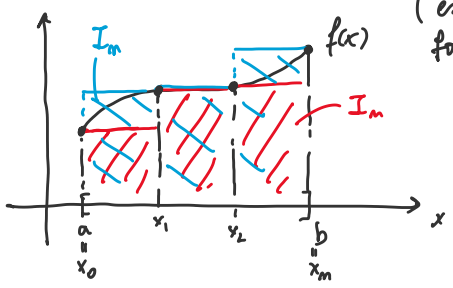
2). Numericamente tramite FORMULE DI QUADRATURA

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \simeq \boxed{I_n = \sum_{i=0}^{n} \boxed{A_i^{(n)}} f(x_i)}$$

integrale calcolato — PESI DI QUADRATURA — nodi $x_0, \dots, x_n$ in $[a,b]$

Domanda: Come scegliere / calcolare $A_i^{(n)}$ e x_i tale che I_n sia una buona approssimazione di I?

per esempio: somma di Riemann (esempio di formula composta)



FORMULE DI QUADRATURA INTERPOLATORIE

Idea principale: approssimare f con un polinomio interpolatorio $p_n(x)$ di grado n che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0, \dots, x_n$ e definire la formula di quadratura come:

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \simeq \boxed{I_n = \int_a^b p_n(x)\,dx}$$

Più precisamente: $f(x) = p_n(x) + E_n(x)$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b p_n(x)\,dx}_{I_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) A_i^{(n)}} + \underbrace{\int_a^b E_n(x)\,dx}_{R_n(f)}$$

$I_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) A_i^{(n)}$ FORMULA DI QUADRATURA

$R_n(f)$ RESTO DI QUADRATURA

$$\Rightarrow \quad I = I_n + R_n(f)$$

TEOREMA. Condizione necessaria e sufficiente perché $R_n(f) = 0$ è che $f(x) \in P_n$

SIGNIFICA: la formula di quadratura è esatta sui polinomi di grado n (o ha grado n)

OSS • n è il grado minimo ($\Rightarrow$ vedremo più avanti!)

Vediamo come poter costruire una formula di quadratura:

① FORMA DI LAGRANGE

Dati $n+1$ punti $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ (distinti)

$\Rightarrow$ Abbiamo $p_n(x)$ che interpola $(x_i, f(x_i))$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i^{(n)}(x)$$

forma di Lagrange del polinomio interpolatore $p_n(x)$ dei punti $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, \dots, n$, $x_i \in [a,b]$

con $L_i^{(n)}(x)$ polinomi di Lagrange

$$\int_a^b \qquad \int_a^b$$

$$\Rightarrow I_n = \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i^{(n)}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \boxed{\int_a^b L_i^{(n)}(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b L_i^{(n)}(x)\,dx} = A_i^{(n)} \quad \text{pesi di quadratura}$$

DIPENDONO SOLO DA $x_0, \dots, x_n$ E NON DALLA FUNZIONE $f(x)$

Formule Interpolatorie

* $(n+1)$ punti in $[a,b]$ scelti a priori
  ↳ FORMULA DI LAGRANGE

* $(n+1)$ punti equispaziati su $[a,b]$
  ↳ FORMULE DI NEWTON - COTES

* $(n+1)$ punti scelti in modo ottimale in $[a,b]$
  ↳ FORMULE DI GAUSS

FORMULE DI NEWTON - COTES (x_i EQUISPAZIATI)

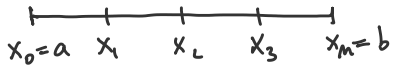
ELEMENTARI

- FORMULE CHIUSE (contengono gli estremi $x_0 = a$, $x_n = b$)

$$x_i = a + i\,h \qquad i = 0, \dots, n$$

con passo $h = \dfrac{b-a}{n}$ (spaziatura)

[IN MATLAB: `x = a : h : b` oppure `x = linspace(a, b, n+1)`]



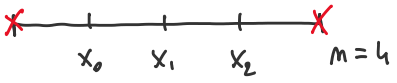
$n = 4$

- FORMULE APERTE (non contengono gli estremi)

$$x_i = a + (i+1)\,h \qquad i = 0, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{\quad}$$

$n = \frac{}{m}$



Calcolo dei pesi tramite la formula di Lagrange

$$A_i^{(n)} = \int_a^b L_i^{(n)}(x)\,dx \qquad L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

cambio variabile $t = \frac{x-a}{h}$ $\qquad x = th+a$

$a - x_j = -jh$

$$\Rightarrow \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{th+a-x_j}{x_i-x_j}\,dt = \frac{h}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (t-j)\,dt$$

Quindi: $A_i^{(n)} = h\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (t-j)\,dt$ PESI

NOTA
- i pesi sono simmetrici
$A_i^{(n)} = A_{n-i}^{(n)}$
- i pesi possono essere negativi (non ideale)

CASI PARTICOLARI (di grande interesse pratico)

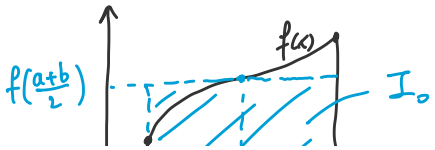
* $n=0$ (formula aperta) FORMULA DEL PUNTO MEDIO

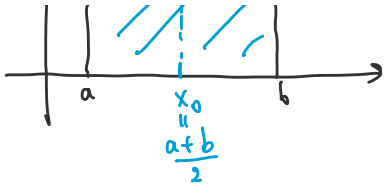
$h = \frac{b-a}{2}$, solo il nodo $x_0 = a+h = a+\frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

(punto medio di $[a,b]$)

$$A_0^{(0)} = \int_a^b L_0^{(0)}(x)\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a$$

$\Rightarrow$ FORMULA: $\boxed{I_0 = A_0^{(0)} f(x_0) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$





* **$n=1$** (chiusa) FORMULA DEI TRAPEZI

$x_0 = a \qquad x_1 = b \qquad h = b-a$

$$A_0^{(1)} = \int_a^b L_0^{(1)}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{1}{a-b}\int_a^b (x-b)\,dx =$$

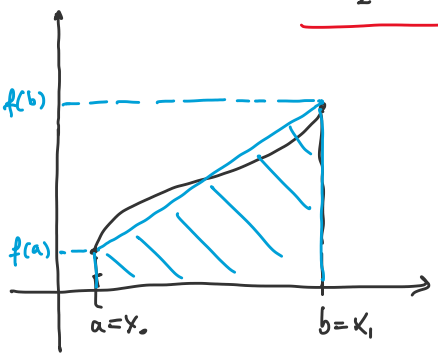
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b = 0 - \frac{(a-b)^2}{2}\,\frac{1}{a-b} = \frac{b-a}{2}$$

analogamente $A_1^{(1)} = A_0^{(1)} = \frac{b-a}{2}$

FORMULA

$$I_T = I_1 = \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{A_0^{(1)}} \underbrace{f(a)}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{A_1^{(1)}} \underbrace{f(b)}_{f(x_1)} =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$



* **$n=2$** (chiusa) FORMULA DI SIMPSON

$h = \frac{b-a}{2} \qquad x_0 = a \qquad x_1 = \frac{b+a}{2}$ (PUNTO MEDIO) $\qquad x_2 = b$

$$I_{CS} = I_2 = \overbrace{\frac{b-a}{6}}^{A_0^{(2)}} f(a) + \overbrace{\frac{4(b-a)}{6}}^{A_1^{(2)}} f\left(\frac{b+a}{2}\right) + \overbrace{\frac{b-a}{6}}^{A_2^{(2)}} f(b)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$$

Si può dimostrare che l'errore di quadratura in questi 3 casi è:

PUNTO MEDIO: $I - I_0 = R_0 = \frac{h^3}{24} f''(\xi) \quad \xi \in [a,b]$

GRADO DI PRECISIONE $r = 1$

TRAPEZI $I - I_1 = R_1 = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad \xi \in [a,b]$

GRADO DI PRECISIONE $r = 1$

SIMPSON $I - I_2 = R_2 = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$

GRADO DI PRECISIONE $r = 3$

GRADO DI PRECISIONE = I_n ha grado di precisione pari ad r se è esatta sui polinomi di grado r

TEOREMA. Il grado di precisione di una formula interpolatoria è al minimo n, ovvero $r \geq n$

OSSERVAZIONE: ERRORE FORMULE DI NEWTON-COTES IN GENERALE

$$E_n(x) = F(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \text{con} \quad F(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$R_n(f) = \int_a^b E_n(x)\,dx = \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

↑ integrale di un polinomio

(scelto n, si sa calcolare)

n PARI (numero dispari di nodi)

$\Rightarrow I_n$ ha grado di esattezza $n+1$

N DISPARI (numero pari di nodi)

$\Rightarrow I_n$ ha grado di esattezza n

STABILITA' E CONVERGENZA

Vediamo il concetto di stabilità per le formule di quadratura.

Nella pratica: i valori utilizzati nel calcolo saranno dei valori perturbati $f^*(x_i)$.

Definiamo $\varepsilon_i = f^*(x_i) - f(x_i)$ ← valori esatti

e vediamo come si comporta questa perturbazione per effetto delle formule di quadratura:

$$I_n^* - I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \varepsilon_i$$

DEFINIZIONE

* **STABILITA'**: I_n è una formula stabile se $\forall \varepsilon_i$ $i=0,\dots,n$ esiste $M>0$ indipendente da n tale che:

$$\left| \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \varepsilon_i \right| \leq M \max_{i=0,\dots,n} |\varepsilon_i|$$

TEOREMA. I_n è stabile se e solo se esiste $M>0$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}| \leq M \quad \forall n$$

DEFINIZIONE

* CONVERGENZA : I_n è convergente su di una classe di funzioni $\mathcal{F}$, se $\forall f \in \mathcal{F}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \lim_{n\to\infty} I - I_n = 0$$

TEOREMA. Sia $\mathcal{F} = C_\infty[a,b]$ (funzioni continue su $[a,b]$ con la norma ∞), $[a,b]$ limitato.
Si ha:

$$I_n \text{ stabile} \iff I_n \text{ convergente}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n} |A_i^{(n)}| \leq M \quad \forall n \qquad (\star)$$

quindi la verifica sulla condizione $(\star)$ garantisce convergenza e stabilità.

Per le formule di Newton-Cotes (semplici) ci dà un risultato negativo:

TEOREMA. Sia I_n la formula di Newton-Cotes, allora
$$\lim_{n\to\infty} |A_i^{(n)}| = \infty$$

Quindi : NON sono utilizzabili con n grande

Per ora abbiamo definito le formule di quadratura sfruttando l'idea che possiamo approssimare $f(x)$ con un polinomio

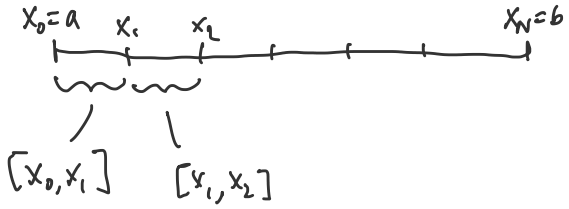
Idea 2 → Possiamo sfruttare anche la LINEARITÀ DELL'INTEGRALE per ottenere le FORMULE COMPOSTE.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

e su ogni sottointervallo applico una formula interpolatoria semplice

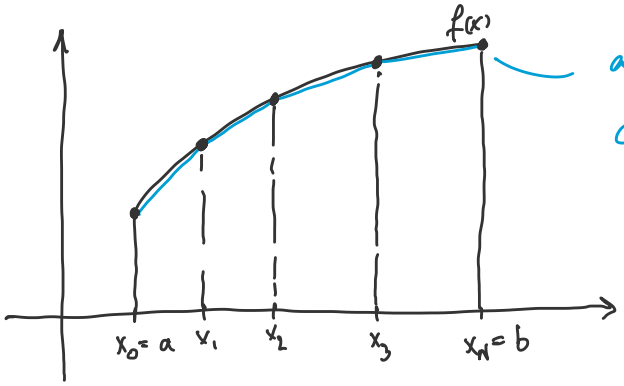
Consideriamo $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_{k-1}, x_k]$ N sottointervalli



$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$

In ogni sottointervallo possiamo utilizzare una delle formule viste in precedenza (semplici)

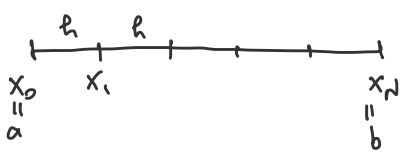
- **FORMULA DEI TRAPEZI COMPOSTA**



approssimazione di $f(x)$ con una lineare a tratti

con nodi equispaziati $x_i = a + ih$ $\quad i=0,\dots,N$

$$h = \frac{b-a}{N}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^{N} \frac{(x_k - x_{k-1})}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right)$$

se $x_k - x_{k-1} = h = \frac{b-a}{N}$

$$\Rightarrow \quad I_{N,T} = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right) = \frac{b-a}{2N}\sum_{k=1}^{N}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2N}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{N-1})+f(x_N)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2N}f(x_0) + \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k) + \frac{b-a}{2N}f(x_N)$$

Quindi:

$I = I_{N,T} + R_{N,T}$ dove in questo caso:

$$R_{N,T} = \sum_{k=1}^{N} -\frac{(x_k - x_{k-1})^3}{12} f''(\xi_k) \qquad \text{con } \xi \in [x_{k-1}, x_k]$$

$x_k - x_{k-1} = h$

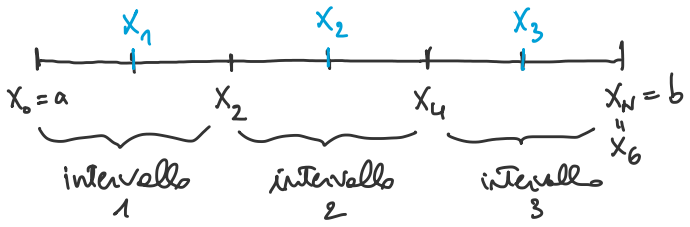
$$= -\frac{(b-a)^3}{12N^3}\sum_{k=1}^{N} f''(\xi_k)$$

per il teorema del valor medio
$\exists\, \xi \in [a,b]$:
$f''(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f''(\xi_k)$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

con $\xi \in [a,b]$

- FORMULA DI CAVALIERI-SIMPSON COMPOSTA



$$I_{N,CS} = I_{CS}^{(1)} + \dots + I_{CS}^{(N/2)} \qquad x_i = a + ih \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

$i = 0, \dots, N$ — N PARI

sui sottointervalli $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$ ...

$$I_{N,CS} = \underbrace{\frac{x_2 - x_0}{6}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}_{\text{su } [x_0, x_2]} +$$

$$+ \frac{x_4 - x_2}{6}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{x_N - x_{N-2}}{6}\left[f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\right]$$

($x_N - x_{N-2} = 2h$)

$$= \frac{2h}{6}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ DISPARI}}}^{N-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ PARI}}}^{N-1} f(x_i) + f(x_N)\right]$$

Quindi:

$$I = I_{N,CS} + R_{N,CS}$$

$$\text{con } R_{N,CS} = \sum_{k=1}^{N} -\frac{(x_k - x_{k-1})^5}{90} f^{(IV)}(\xi_k) \qquad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

ottenuto con passaggi simili a quelli dei trapezi

$$= -\frac{(b-a)^5}{180\, N^4} f^{(IV)}(\xi) \qquad \text{con } \xi \in [a, b]$$

ESERCIZIO

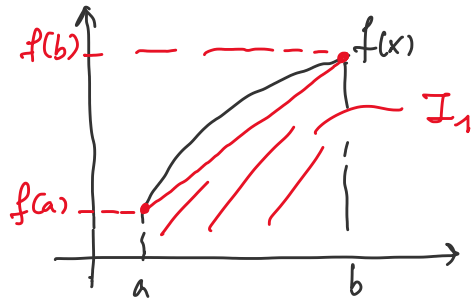
$$I = \int_a^b \left| \cos(x)\, e^{-x} \right| dx \qquad [a, b] = \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3}{4}\pi\right]$$

1) Calcolare I_T, con la formula dei trapezi semplice $I_{1,T}$ e composta con 2 sottointervalli $I_{2,T}$

2) Fare la stessa cosa con la formula di Cavalieri-Simpson, per $I_{1,CS}$ e $I_{2,CS}$.

Svolgimento

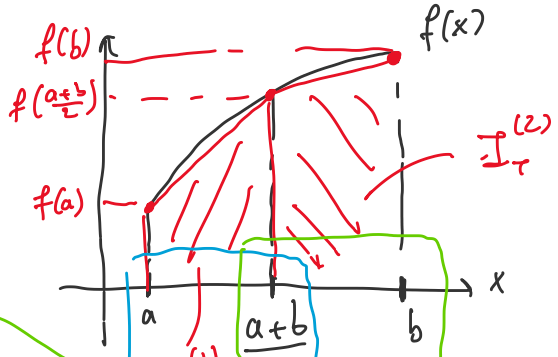
1. Formula dei Trapezi



$$I_{T,1} = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) =$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}}{2}\left[\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{-\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)e^{-\frac{3}{4}\pi}\right|\right] =$$

$$= 0.375034$$



$$I_{T,2} = I_T^{(1)} + I_T^{(2)} =$$

$$= \frac{\frac{a+b}{2}-a}{2}\left[f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + \frac{b-\frac{a+b}{2}}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

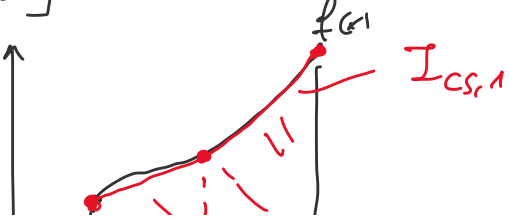
$$= 0.152924$$

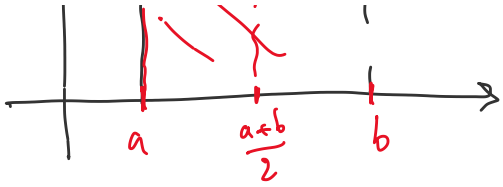
$$\left(I = 0.14086 \quad \text{esatto}\right)$$

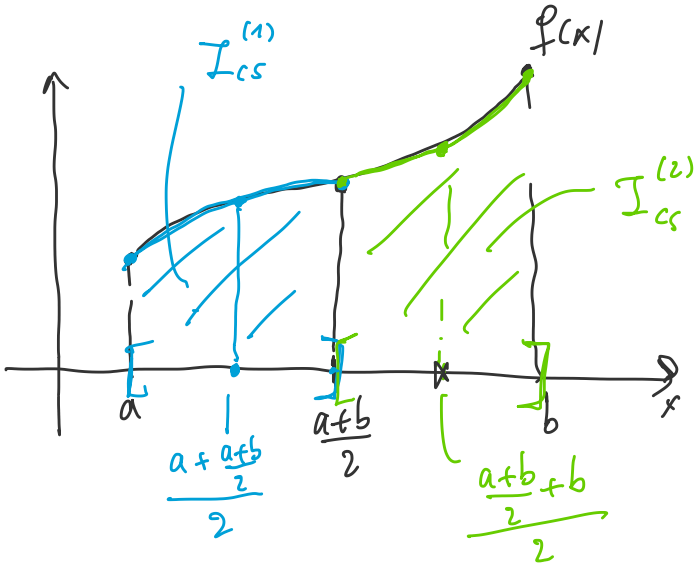
2. Formula di Cavalieri - Simpson

$$I_{CS,1} = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= 0.101949$$







$I_{cs,2}$ con due sottointervalli

$$I_{cs,2} = I_{cs}^{(1)} + I_{cs}^{(2)} =$$

$$= \frac{\frac{a+b}{2} - a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{b - \frac{a+b}{2}}{6}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= 0.140788$$