

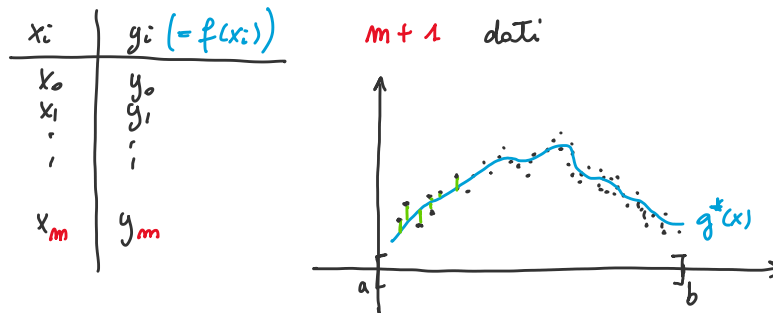
3E-Approssimazione ai minimi quadrati

martedì 9 aprile 2024 11:53

APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

- * tanti dati (sperimentali)
 - * dati affetti "da rumore"
 - * dati affetti da errore
- } → interpolazione polinomiale NON opportuna

DATI (noti)



Scelgo la migliore funzione g^* all'interno di una classe di funzioni $\mathcal{F}$ tale che:

$$\sum_{i=0}^m (y_i - \boxed{g^*(x_i)})^2 w(x_i) = \min_{g \in \mathcal{F}} \sum_{i=0}^m \underbrace{(y_i - g(x_i))^2}_{E(x)} \underbrace{w(x_i)}_{\text{peso}}$$

ESEMPIO. scelgo la classe di funzioni $\mathcal{F} = \mathcal{P}_1$ (rette)

e tra tutte le rette scelgo quella che minimizza

l'errore quadratico.

OSS. $m \gg n$

$g(x) = a_0 + a_1 x$ cerco a_0, a_1 tali che

$$\min_{a_0, a_1} \sum_{i=0}^m (y_i - g(x_i))^2 w(x_i)$$

NOTA. Se $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale di dim $m+1$ ($m \ll n$)
 ⇒ la funzione che minimizza l'errore quadratico è unica!

Consideriamo per semplicità $\boxed{w(x) = 1}$ (caso standard)

$\mathcal{F}$ spazio di funzioni di dimensione $m+1 \rightarrow \boxed{m \ll n}$

↑ $\mathcal{F} = \{g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ base di $\mathcal{F}$

$$g(x) = a_0 g_0(x) + \dots + a_m g_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k g_k(x) \quad a_k \in \mathbb{R} \quad k=0, \dots, m$$

(es: scegliamo i polinomi di grado m)

$$F(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^m \left(y_i - \underbrace{\sum_{k=0}^m a_k g_k(x_i)}_{g(x_i)} \right)^2 \rightarrow \boxed{\text{Vogliamo trovare il minimo di } F}$$

Sono LE INCOGNITE!

Per trovare il minimo di F , calcoliamo le derivate:

$$\boxed{\frac{dF}{da_j} = 0 \quad j=0, \dots, m} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{HO } m+1 \text{ CONDIZIONI} \\ \text{PER CALCOLARE LE} \\ m+1 \text{ INCOGNITE} \\ a_0, \dots, a_m \end{array}}$$

Scegliamo: $g_j = P_m \quad g(x) = p_m(x)$ polinomio di grado m

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad a_k, k=0, \dots, m \text{ incognite}$$

• $F(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^m \left(y_i - \sum_{k=0}^m a_k x_i^k \right)^2$ funzione da minimizzare

• Calcolo $\frac{dF}{da_j} = 0 \quad j=0, \dots, m$ per trovare il minimo

$$\frac{dF}{da_j} = 2 \sum_{i=0}^m \left(y_i - \sum_{k=0}^m a_k x_i^k \right) x_i^j = 0 \quad j=0, \dots, m \quad (m+1 \text{ condizioni } \checkmark)$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^m a_k x_i^k x_i^j = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=0}^m x_i^k x_i^j = \sum_{i=0}^m y_i x_i^j \quad j=0, \dots, m$$

a_k incognite

$\Rightarrow$ $m+1$ condizioni:
in $m+1$ incognite:

$$\sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=0}^m x_i^k x_i^j = \sum_{i=0}^m y_i x_i^j \quad j=0, \dots, m \quad (1)$$

Possiamo risolverlo come sistema: $Aa = b$ (rettangolare)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} m+1 \text{ righe} \\ m+1 \text{ colonne} \end{array}$$

$$A \in M^{m+1, m+1}(\mathbb{R}) \quad \text{matrice } (m+1) \times (m+1)$$

$$b = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \quad \text{vettore } (m+1) \times 1 \quad \begin{array}{l} \text{Termini} \\ \text{dati} \end{array}$$

$$[y_m]$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ | \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ vettore } (m+1) \times 1 \text{ (incognite)}$$

①

$$A^T A a = A^T b$$

sistema ai minimi
quadrati

DSS. $A \in M^{m+1, m+1}(\mathbb{R})$ $A^T = A$ trasposta $\in M^{m+1, m+1}(\mathbb{R})$

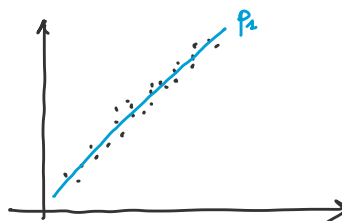
$A^T A \in M^{m+1, m+1}(\mathbb{R})$ quadrata, SIMMETRICA
e dipende solo da
 x_i e dalla base $\{g_0(x), \dots, g_m(x)\}$

ESEMPIO LINEARE — RETTA DI REGRESSIONE —

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x \quad m=1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} \quad m+1$$

$m+1=2$



$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i \\ \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{matrice} \\ 2 \times 2 \\ (m+1) \times (m+1) \end{array}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \\ \sum_{i=0}^m x_i y_i \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vettore } 2 \times 1 \\ (m+1) \times 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ sistema ai minimi quadrati $A^T A a = A^T b$

$$\left\| \begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{da qui ottengo}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \sum_{i=0}^m x_i y_i \end{array} \right]$$

a_0 e a_1

per $p_1(x) = a_0 + a_1 x$
RETTA DI REGRESSIONE

ESEMPIO.

x_i	-5	-3	1	3	4	6	8
y_i	18	7	0	7	16	50	67

$$7 = m + 1 \text{ dati} \Rightarrow m = 6$$

① Calcolo la retta di regressione: $m=1$

$$A^T A = \begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i \\ \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 14 & 160 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \\ \sum_{i=0}^m x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 810 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T A a = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 14 & 160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 810 \end{bmatrix} = A^T b$$

↓

$$\text{risolvendo il sistema: } \begin{aligned} a_0 &= 16.298701 \\ a_1 &= 3.63 \end{aligned}$$

quindi $p_1(x) = 16.298701 + 3.63 x$

② Calcolo la parabola che minimizza F ai minimi quadrati

$$m = 2 \quad p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 \\ \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \sum_{i=0}^m x_i^3 \\ \sum_{i=0}^m x_i^2 & \sum_{i=0}^m x_i^3 & \sum_{i=0}^m x_i^4 \end{bmatrix} \quad \text{matrice } 3 \times 3$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \end{bmatrix} \quad \text{vettore } 3 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m x_i y_i \\ \sum_{i=0}^m x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

⇒ bisogna risolvere

$$\underbrace{A^T A}_{3 \times 3} \underbrace{a}_{\text{3 incognite}} = \underbrace{A^T b}_{3 \times 1}$$

CASO RETTA DI REGRESSIONE
M=1

con PESI $w(x_i) = w_i$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} & \sqrt{w_0} x_0 \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{w_m} & \sqrt{w_m} x_m \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \sqrt{w_0} & \sqrt{w_0} x_0 \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{w_m} & \sqrt{w_m} x_m \end{bmatrix}} \right\} m+1$$

2

M=1 grado polinomio

m+1 = 2 incognite

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} & \sqrt{w_1} & \dots & \sqrt{w_m} \\ \sqrt{w_0} x_0 & \sqrt{w_1} x_1 & & \sqrt{w_m} x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} & \sqrt{w_0} x_0 \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{w_m} & \sqrt{w_m} x_m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m w_i & \sum_{i=0}^m w_i x_i \\ \sum_{i=0}^m w_i x_i & \sum_{i=0}^m w_i x_i^2 \end{bmatrix} \quad \text{matrice } 2 \times 2$$

$$b = \begin{bmatrix} \sqrt{w_0} y_0 \\ \sqrt{w_1} y_1 \\ \vdots \\ \sqrt{w_m} y_m \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m w_i y_i \\ \sum_{i=0}^m w_i x_i y_i \end{bmatrix} \quad \text{vettore } 2 \times 1$$

⇒ bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m w_i & \sum_{i=0}^m w_i x_i \\ \sum_{i=0}^m w_i x_i & \sum_{i=0}^m w_i x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m w_i y_i \\ \sum_{i=0}^m w_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

per avere $p_1(x) = a_0 + a_1 x$