3D-Interpolazione polinomiale - Errore di interpolazione

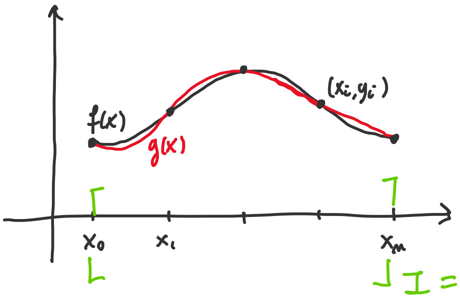
giovedì 4 aprile 2024 16:46

ERRORE DI INTERPOLAZIONE

$m+1$ dati

x_i	x_0	x_1	...	x_m
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	--	y_m

Assumiamo che $y_i = f(x_i)$ con f una funzione nota



$g(x) = p_m(x) \in \mathbb{P}_m$
polinomio interpolante

Vogliamo stimare $|f(x) - p_m(x)|$!

$I = [\alpha, \beta] = [x_{MIN}, x_{MAX}]$ intervallo di interpolazione

$$f(x) = p_m(x) + \underbrace{E_m(x)}_{\text{errore di interpolazione}}$$

$$E_m(x) = f(x) - p_m(x)$$

OSS. $E_m(x_i) = 0$ ERRORE NULLO AI NODI (per def. di interpolazione)

Def. POLINOMIO NODALE $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m) = \prod_{i=0}^{m}(x-x_i)$

- grado $m+1$ ($F(x) \in \mathbb{P}_{m+1}$)
- $F(x_i) = 0 \quad \forall x_i$

Vogliamo stimare E_m :

(1) Prendiamo un punto $t \in I$, ma $t \neq x_i$ $i = 0, \dots, m$
(diverso dai punti di appoggio)

(OSS. $t \in (x_{MIN}, x_{MAX})$ punto interno di I, perché gli estremi di I sono dei punti di appoggio)

(2) Cerchiamo una funzione $G(x)$ che si annulli in tutti i punti x_i (come $F(x)$) E anche in t

$$\begin{cases} G(x_i) = 0 & i = 0, \dots, m \\ G(t) = 0 \end{cases}$$

Sappiamo $E_m(x_i) = 0$ (per proprietà di interpolazione)

$F(x_i) = 0$ (per definizione)

$\Rightarrow$ definisco $G(x) = E_n(x) - S_0(t)F(x)$

$= f(x) - p_n(x) - S_0(t)F(x)$

devo scegliere $S_0(t)$

* $G(x_i) = 0$ ✓
* Impongo $G(t) = 0$ per scegliere $S_0(t)$:

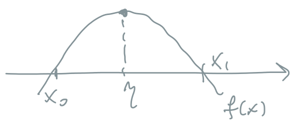
$$G(t) = 0 = f(t) - p_n(t) - S_0(t)F(t)$$

$$\Rightarrow S_0(t) = \frac{f(t) - p_n(t)}{F(t)}$$

$\Rightarrow$ $G(x)$ si annulla in $n+2$ punti $\{x_0, \ldots, x_n, t\}$.

Inoltre, $G(x)$ è regolare in I (estremi esclusi)

$\hookrightarrow$ per il $\boxed{\text{TEOREMA DI ROLLE}}$ abbiamo che esistono $n+1$ punti $\eta_i \in (x_{MIN}, x_{MAX})$ tali che $G'(\eta_i) = 0$



· $f(x)$ continua
· $f(x_0) = f(x_1) = 0$
$\Rightarrow \exists\ \eta \in (x_0, x_1) : f'(\eta) = 0$

Analogamente: se $G'(x)$ si annulla in $n+1$ punti $\Rightarrow$ $G''(x)$ si annulla in n punti $\Rightarrow$ $G'''(x)$ ...

.. $\Rightarrow \exists\ \xi \in (x_{MIN}, x_{MAX})$ per cui $G^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Da cui: $0 = G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underset{p_n^{(n+1)}(x) = 0}{0} - S_0 \underbrace{(n+1)!}_{F^{(n+1)}(x) = (n+1)!}$

$$\Rightarrow S_0 = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Quindi $\longrightarrow$

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x) = F(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

FORMULA DEL RESTO DI LAGRANGE

<u>Significa che</u>: sostituendo a $f(x)$ il polinomio interpolatore $p_n(x)$ si incorre in un <u>errore massimo</u> proporzionale alla derivata $(n+1)$-esima di $f(x)$

<u>TEOREMA</u>. $f \in C^{n+1}$, $x \in [a,b]$ = intervallo di interpolazione

$\Rightarrow \exists\ \xi : (a,b)$ tale che

$$|E_n(x)| = \left| F(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \le |F(x)| \cdot \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \le$$

$$\le |F(x)| \frac{\max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \qquad \forall x \in [a,b]$$

ESEMPIO:

$f(x) = \log x$

$n+1$ punti $\longrightarrow$

x_i	2	2.5	3
$y_i = f(x_i)$	$f(2)$	$f(2.5)$	$f(3)$

$\Rightarrow p_2(x)$ è il polinomio interpolatore

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad I = [\overset{x_{min}}{2}, \overset{x_{max}}{3}]$

$$E_2(x) = f(x) - p_2(x) = \log x - p_2(x) = F(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$

$$= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \frac{f'''(\xi)}{3!} =$$

$$= \underbrace{(x-2)(x-2.5)(x-3)}_{n+1 \text{ fattori}} \frac{\boxed{\left(\frac{2}{\xi^3}\right)}}{6} \qquad \xi \in (2,3)$$

in $(2,3)$ $\quad \left|\frac{2}{\xi^3}\right| \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow |E_2(x)| \le \frac{1}{24} |(x-2)(x-2.5)(x-3)|$

Se prendo $x^* \in (2,3)$ $\quad x^* = 2.7$

$$|E_2(2.7)| \le \frac{|(2.7-2)(2.7-2.5)(2.7-3)|}{} = 0.00175$$

$|E_2(2.7)| \le \qquad \dfrac{\quad}{24}$

e l'errore "vero": $|E_2(2.7)| = |\log 2.7 - p_2(2.7)| \approx 0.00086622$

OSSERVAZIONE:

$$|E_n(x)| \le \underbrace{|F(x)|}_{\uparrow} \max_{x \in I} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

l'errore dipende dall'andamento di $F(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$

$\Rightarrow$ DIPENDE FORTEMENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI DI APPOGGIO

Scegliendo opportuni punti $x_i \in I$ possiamo cercare di minimizzare $|F(x)|$ in I.

$\hookrightarrow$ CHEBYSHEV ha risolto il problema di minimizzare $|F(x)|$ in I trovando delle posizioni specifiche dei nodi.

I PUNTI DI CHEBYSHEV sono gli zeri di polinomi ortogonali della famiglia dei polinomi di Chebyshev del 1° tipo (o 2° tipo)

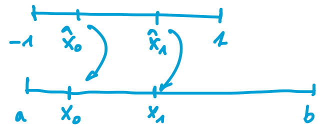
PROPRIETA' DEI POLINOMI ORTOGONALI DI GRADO n

T_n grado esatto n, definiti in $[-1, 1]$

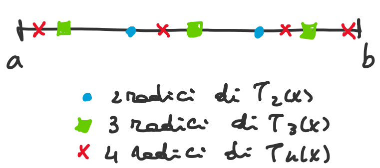
* n soluzioni $\hat{x}_i$ REALI e DISTINTE
* $\underbrace{\text{soluzioni in } [-1,1]}$

se il nostro $I = [a,b]$: si possono riscalare i punti

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punti corrispettivi} \\ \text{in } [a,b]}}{x_i} = \frac{b-a}{2} \underbrace{\hat{x}_i}_{\substack{\uparrow \\ \text{punti in } [-1,1]}} + \frac{b+a}{2} \qquad i = 0, \dots, n$$



* separazione di radici



* si possono calcolare in modo ricorsivo, soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini

$$\boxed{\begin{aligned} &T_0(x) = 1 \\ &T_1(x) = x \\ &T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, \dots \end{aligned}}$$

$$T_2(x) = 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 2x\,(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$$

↳ gli zeri dei polinomi di Chebyshev (di grado $n+1$)

$$\boxed{\hat{x}_i = -\cos\left[\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right] \qquad i = 0, 1, \dots, n}$$

PUNTI DI CHEBYSHEV

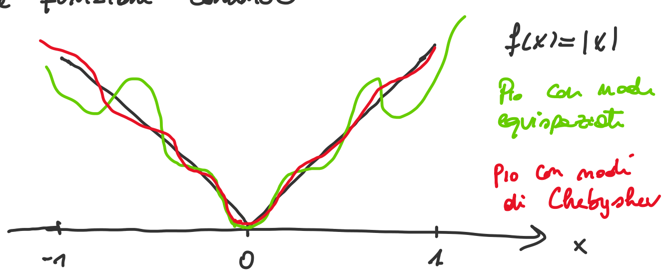
CONVERGENZA DEL POLINOMIO INTERPOLATORE

Ci si aspetterebbe che calcolando polinomi di grado via via maggiore ($n \to \infty$) la successione di questi polinomi convergesse a $f(x)$ in $I = [a,b]$

$\{p_n\}$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[a,b]$,

cioè: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\| f - p_n \|_\infty}_{E_n} = \lim_{n\to\infty} \max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)| = 0$

MA in realtà NON E' VERO per la maggior parte delle funzioni continue



FENOMENO DI RUNGE (visto nel lab 6)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{FUNZIONE DI RUNGE} \qquad I = [-c, c]$$

$c > 3.6338$

usando nodi equispaziati $\lim_{n\to\infty} \| f - p_n \| = \infty$

(Si hanno oscillazioni anche per gradi relativamente ridotti di $p_n(x)$)

TEOREMA DI FABER Per ogni scelta dei nodi $x_i \in [a,b]$, esiste almeno una funzione continua in $[a,b]$ per la quale

$$\lim_{n \to \infty} \| f - p_n \|_\infty \neq 0$$

OSSIA NON SI HA CONVERGENZA

TEOREMA Per ogni funzione continua in $[a,b]$, esiste un opportuno sistema di nodi per il quale

$$\lim_{n \to \infty} \| f - p_n \|_\infty = 0$$

migliore approssimazione uniforme