

3C-Interpolazione polinomiale - Base di Newton

giovedì 4 aprile 2024 12:12

PROBLEMA. Interpolazione dei dati (x_i, y_i) $i=0, \dots, n$ Trovare $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$, polinomio interpolatore di grado n

$$p_n(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, n \quad \text{CONDIZIONE DI INTERPOLAZIONE}$$

↳ Ci sono varie formule per ottenere il polinomio $p_n(x)$:

* SISTEMA DI VAN DER MONDE: formulazione malcondizionata (risolvo la condizione direttamente considerando la base standard $\{1, x, \dots, x^n\}$ di $\mathbb{P}_n$)

* FORMA DI LAGRANGE: $\mathbb{P}_n = \langle L_0^{(n)}(x), \dots, L_n^{(n)}(x) \rangle$ base di Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i^{(n)}(x)$$

Scomodo! se aggiungo una nuova coppia di punti (x_j, y_j) devo ricalcolare i polinomi della base

* FORMA DI NEWTON

Consideriamo la base formata da monomi in cui si considerano man mano tutti i punti:

$$\left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{1}, \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{(x-x_0)}, \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{(x-x_0)(x-x_1)}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})} \right\}$$

Quindi, possiamo scrivere il nostro polinomio interpolatore $p_n(x)$ come:

$$p_n(x) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot (x-x_0) + c_2 \cdot (x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

gli elementi della base di $\mathbb{P}_n$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j) \quad \text{FORMA DI NEWTON}$$

in questo caso sono i coefficienti c_i che determinano il polinomio

OSS. Si vede che è facile aggiornare il polinomio in caso di aggiunta di dati

$$\begin{array}{c|c} x_i & y_i \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{c|c} x_0 & y_0 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \\ x_{m+1} & y_{m+1} \end{array} \right\} p_n(x) \quad \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} p_{n+1}(x) \rightarrow p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1}(x-x_0) \cdots (x-x_n)$$

* COME SI DETERMINANO I c_i ?

• calcolo diretto

• SCHEMI TRIANGOLARI

↳ FORMULA DI NEWTON ALLE DIFFERENZE FINITE
(i nodi devono essere ORDINATI e EQUISPAZIATI)

(più generale)
↳ FORMULA DI NEWTON ALLE DIFFERENZE DIVISE
(non ci sono vincoli sui nodi, devono essere DISTINTI)

Formula di Newton alle DIFFERENZE DIVISE

$$\begin{array}{c|c} x_i & y_i = f(x_i) \\ \hline x_0 & y_0 = f(x_0) \\ ! & \\ x_m & y_m = f(x_m) \end{array} \quad \rightarrow \quad p_m(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_m(x-x_0) \cdots (x-x_{m-1})$$

Differenze divise di ordine i della funzione f :

ordine 0 $f[x_i] = f(x_i) = y_i \rightarrow$ dato della tabulazione

ordine 1 $f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$

ordine 2 $f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$

⋮

ordine n $f[x_0, \dots, x_m] = \frac{f[x_0, \dots, x_{m-1}] - f[x_1, \dots, x_m]}{x_0 - x_m}$

↳ da qui: $c_0 = f[x_0] = f(x_0)$

$c_1 = f[x_0, x_1]$

$c_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

⋮

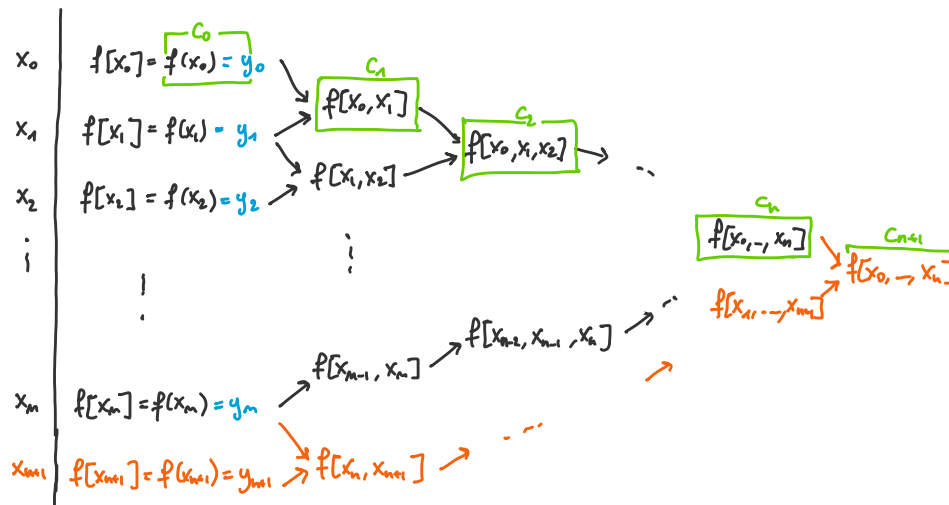
$c_m = f[x_0, \dots, x_m]$

m

$i-1$

$$p_n(x) = \underbrace{f(x_0)}_{c_0} + \sum_{i=1}^n \underbrace{f[x_0, \dots, x_i]}_{c_i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Nella pratica:



OSSERVAZIONE

Posso vedere $f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$

e più in generale: $f[\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k+1 \text{ volte}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Quindi: è possibile includere nei punti di appoggio (i dati)

anche il valore delle derivate e utilizzare la

tabella di Newton in modo opportuno per ottenere

il polinomio interpolatore

ESERCIZIO. Calcolare il polinomio interpolatore $p_3(x)$

con la tabella di Newton alle differenze divise

dati i punti

x_i	1	2	3	4
y_i	3	1	5	2

Voglio calcolare

$$p_3(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^3 f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$



TABELLA DI NEWTON

$x_0 = 1$	$f(x_0) = y_0 = 3$	C_0		
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 1$	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = -2$	C_1	
$x_2 = 3$	$f(x_2) = 5$	$f[x_1, x_2] = \frac{1-5}{2-3} = 4$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{-2-4}{1-3} = 3$	C_2
$x_3 = 4$	$f(x_3) = 2$	$f[x_2, x_3] = \frac{5-2}{3-4} = -3$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3} = \frac{4+3}{2-4} = -\frac{7}{2}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} = \frac{3 + \frac{7}{2}}{1-4} = -\frac{13}{6}$

⇒ quindi il polinomio diventa:

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \\
 &= 3 + (-2)(x-1) + 3(x-1)(x-2) + \left(-\frac{13}{6}\right)(x-1)(x-2)(x-3) = \\
 &= 24 - 34.8333x + 16x^2 - 2.16667x^3
 \end{aligned}$$