3B-Interpolazione polinomiale- Base di Lagrange

mercoledì 3 aprile 2024 11:12

La scelta dei polinomi algebrici per interpolare i dati è una scelta comune e molto usata.

CASI IN CUI NON E' UNA BUONA SCELTA:

ASSUMENDO CHE I DATI POSSANO ESSERE DESCRITTI DA $f(x)$

- se $f(x) \to 0$ per $x \to \infty$ (perché $p_n(x) \to \infty$ per $x \to \infty$)
- se $f(x)$ periodica

CLASSE DEI POLINOMI DI GRADO n (SPAZIO VETTORIALE)

$$\mathbb{P}_n(x) = \{ p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \,,\; a_i \in \mathbb{R} \; i=0,\dots,n \}$$

$$\dim \mathbb{P}_n(x) = n+1$$

$n+1$ coefficienti da scegliere per determinare uno specifico polinomio

BASE CANONICA $= \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

↳ ⚠ non si usa! Vediamo perché non è una buona scelta in questo caso:

- Come potrei determinare gli $n+1$ coefficienti a_i che mi determinano l'unico polinomio interpolatore dati $n+1$ punti?

$n+1$ punti : $(x_i, y_i) \quad i=0,\dots,n$

Impongo che $p_n(x)$ passi per i punti:

CONDIZIONE DI INTERPOLAZIONE $\quad p_n(x_i) = y_i \quad i=0,\dots,n$

Esplicitamente:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_1 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

sistema con $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite ↳ $a_i \; i=0,\dots,n$

Tradotto in forma matriciale:

base canonica valutata nei punti

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE DI VANDERMONDE}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\text{INCOGNITE}} = \overbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}^{\text{DATI}}$$

↳ la matrice è invertibile **MA** è molto MALCONDIZIONATA (dipende molto dai punti (x_i, y_i) scelti)

⇒ per questo motivo la base canonica **NON** è una buona scelta.

RICHIAMO. Scelgo $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v} = -3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3} =$$

$$= -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 \quad , \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

base canonica

↳ scelgo $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$

e voglio esprimere $\vec{v} = \beta_1 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 + \beta_3 \vec{w}_3$ nelle componenti β_i rispetto alla nuova base $\mathcal{B}$

⇓ FACCIAMO LO STESSO CON LO SPAZIO $\mathbb{P}_n$

BASE DI LAGRANGE $\{L_0^{(n)}(x), \ldots, L_n^{(n)}(x)\}$

Voglio esprimere un $p_n(x) \in \mathbb{P}_n(x)$ nella base di Lagrange:

$$p_n(x) = b_0 L_0^{(n)}(x) + b_1 L_1^{(n)}(x) + \ldots + b_n L_n^{(n)}(x)$$

Costruiamo i polinomi della base a partire dai punti x_i:

$$F(x) = \underbrace{\prod_{i=0}^{n}}_{\text{simbolo di prodotto}} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

PROPRIETÀ $F(x)$
- grado $n+1$
- si annulla su $x = x_i \quad i = 0, \ldots, n$

Noi vogliamo un polinomio di grado n che soddisfi la proprietà di interpolazione ⟶ Tolgo un monomio

$$F_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

PROPRIETÀ $F_i(x)$
- grado n
- si azzera su $x = x_j$ per $j = 0, \ldots, n$, $j \neq i$ (tutti i nodi tranne x_i)

Costruiamo la base $L_i^{(n)}(x)$ come:

$$\boxed{L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\overbrace{x - x_j}^{F_i(x)}}{x_i - x_j}} = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

$F_i(x_i)$

NOTA. I nodi (o punti) per calcolare la base di Lagrange possono essere di qualsiasi tipo (NON ordinati, NON equispaziati)

Quindi: $\quad p_m(x) = b_0 L_0^{(m)}(x) + b_1 L_1^{(m)}(x) + \dots + b_m L_m^{(m)}(x)$

Valutando nei punti $x = x_i \quad i = 0, \dots, m$:

$$L_i^{(m)}(x_j) = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{delta di Kronecker}} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_m(x_i) = b_0 \underbrace{L_0^{(m)}(x_i)}_{=0} + b_1 \underbrace{L_1^{(m)}(x_i)}_{=0} + \dots + b_i \underbrace{L_i^{(m)}(x_i)}_{=1} + \dots + b_m \underbrace{L_m^{(m)}(x_i)}_{=0}$$

$= y_i \quad \leftarrow$ lo impongo per avere la condizione di interpolazione

$$\Rightarrow \boxed{b_i = y_i \qquad i = 0, \dots, m}$$

Quindi:

$$\boxed{p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \underbrace{y_i}_{\text{coefficienti del polinomio}} \underbrace{L_i^{(m)}(x)}_{\text{BASE DI LAGRANGE}}}$$

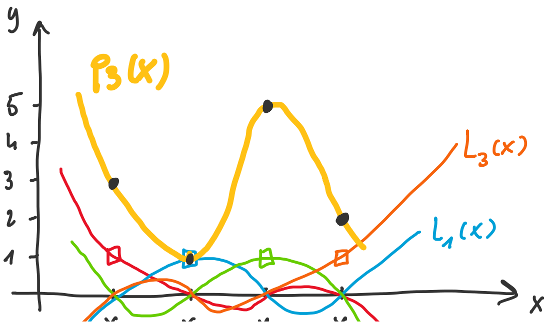
FORMA DI LAGRANGE

$p_m(x)$ è il polinomio interpolatore di $(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, m$ scritto nella base di Lagrange.

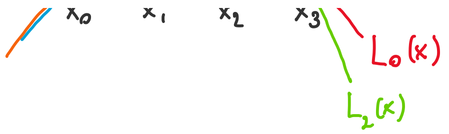
ESEMPIO

Dati i 4 nodi:

x_i	1	2	3	4
y_i	3	1	5	2



$\leftarrow$ oss. $\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad j \neq i \end{cases}$



4 nodi $\Rightarrow$ cerco $p_3(x)$ di grado 3

$$p_3(x) = y_0 L_0^{(3)}(x) + y_1 L_1^{(3)}(x) + y_2 L_2^{(3)}(x) + y_3 L_3^{(3)}(x)$$

$$L_0^{(3)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_1^{(3)}(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

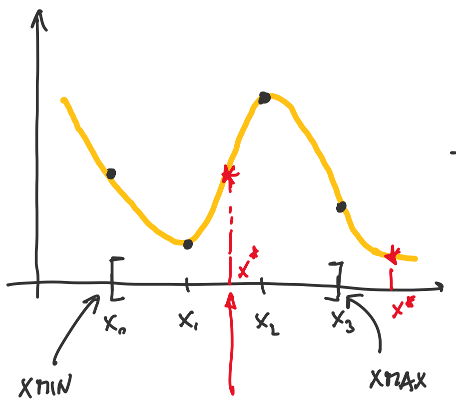
* tutti di grado 3
* $L_i(x_j) = \delta_{ij}$

$$L_2^{(3)}(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_3^{(3)}(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$\Rightarrow p_3(x) = 24 - 34.8333\,x + 16x^2 - 2.16667\,x^3$$

(verificare)



dati conosciuti (x_i, y_i) $i = 0,1,2,3$

$\Rightarrow$ ora con $\boxed{p_3(x)}$ possiamo analizzare anche in punti fuori dai nodi di interpolazione

polinomio interpolatore

posso valutare $p_3(x^*)$

$\hookrightarrow$ se $x^* \notin I = [x_{MIN}, x_{MAX}]$ si parla di ESTRAPOLAZIONE

Note. Algoritmo di AITKEN per il calcolo della forma di Lagrange (VEDI LIBRO)