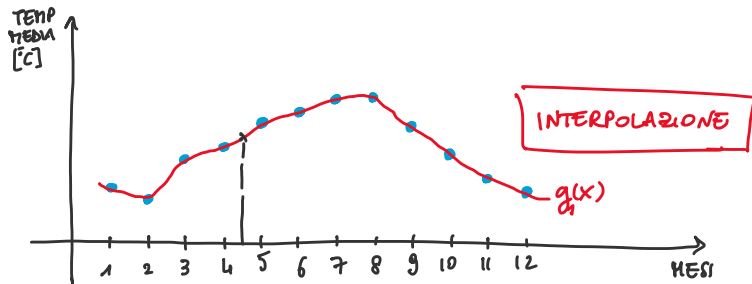


3A-Introduzione interpolazione-approssimazione AP3 APPROSSIMAZIONE

martedì 26 marzo 2024 11:47

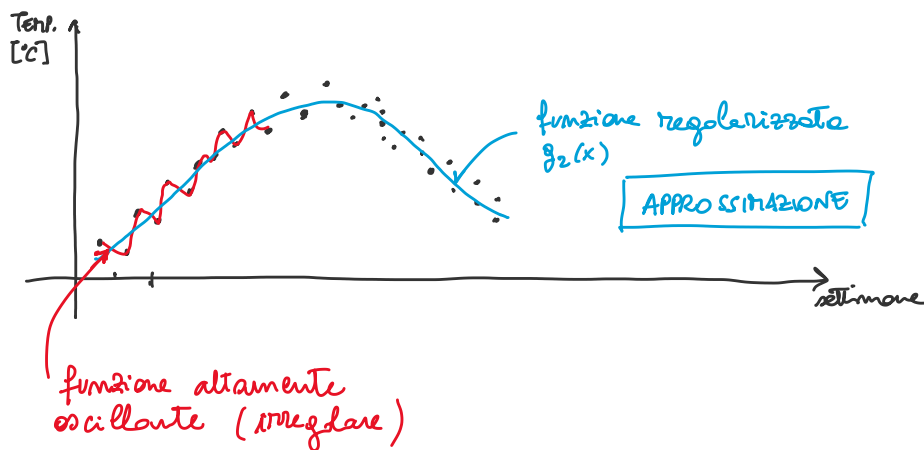
ESEMPIO Supponiamo di avere le temperature medie mensili mediate su qualche anno



Vogliamo trovare una funzione che "passi" per i punti per avere una descrizione della temperatura anche fuori dai punti osservati (NOD)

$g_1(x)$ → funzione smooth che passa per i valori dati

Supponiamo ora di avere i valori delle temperature medie settimanali (valori molto più scillanti)



↳ Idea: Data una serie di punti (coppie (x, y)) ci sono due modi di vedere le cose:

- (1) Trovare la funzione $g_1(x)$, all'interno di una classe di funzioni predefinita, che passa per tutti i punti osservati

↳ INTERPOLAZIONE

- (2) Trovare la funzione $g_2(x)$, all'interno di una classe di funzioni predefinita, che segue l'andamento medio dei punti osservati. In altre parole, che minimizza la differenza tra i dati osservati e la funzione nei punti di osservazione

↳ APPROSSIMAZIONE

TIPOLOGIA DI DATI

- DISCRETI : dati da tabulazione (n° finito)

(es. misure sperimentali)

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_m	y_m

- CONTINUI : nota $f(x)$ in modo analitico, voglio "sostituirla" con $g(x)$ nella mia classe di funzioni

(es. per integrare o fare altre operazioni)

Anche in questo caso uso una tabulazione:

x_i	$y_i = f(x_i)$
x_0	$y_0 = f(x_0)$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	$y_m = f(x_m)$

$f(x) \mapsto$ cerco $g(x)$

SCELTA DELLA CLASSE DI FUNZIONI

↳ criteri di regolarità

- POLINOMI ALGEBRICI di grado m

$$\mathcal{P}_m = \{ p_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, a_i \in \mathbb{R}, i=0, \dots, m \}$$

SPAZIO VETORIALE di dimensione $m+1$

($m+1$ incognite)

2 dati
 $m=1$ (retta)
 $p_1(x) = a_0 + a_1x$

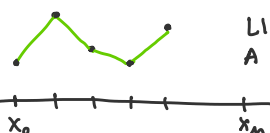
3 dati
 $m=2$ (parabola)
 $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

5 dati
 $m=4$
 $\hookrightarrow p_4(x)$

- FUNZIONI POLINOMIALI A TRATTI

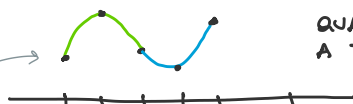
L'intervallo di analisi viene suddiviso in sottointervalli, e in ogni sottointervallo si sceglie un polinomio (di grado basso)

polinomi di grado 1 in ogni sottointervallo (2 punti in ogni sottointervallo)



LINEARE A TRATTI

sottointervalli che ruotano 3



QUADRATICA A TRATTI

punti, scelgo polinomi x_0
di grado 2

x_m

- FUNZIONI TRIGONOMETRICHE $2m+1$ incognite

$$a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

- FUNZIONI RAZIONALI (ottenute come rapporto di polinomi)

$$\frac{p_m(x)}{q_m(x)}$$

$$\begin{aligned} p_m(x) &\in \mathbb{P}_m \\ q_m(x) &\in \mathbb{P}_m \end{aligned} \quad m+m+1 \text{ incognite}$$

normalizzazione $q_m = b_0 + b_1x + \dots + x^m \quad (b_m=1)$

- POLINOMI ESPONENZIALI $\sum_{k=0}^m a_k e^{b_k x} \quad (2m+2 \text{ incognite})$

SCELTA CRITERIO

1) INTERPOLAZIONE

$m+1$ dati (osservati) (x_i, y_i)
 $i=0, \dots, m$

Trovare una funzione $f(x)$ tale che:

CONDIZIONE DI INTERPOLAZIONE $f(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, m$

↑
dati

→ INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

cerchiamo $f(x) = p_m(x) \in \mathbb{P}_m(x)$

$$p_m(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, m$$

$m+1$ condizioni $\Rightarrow$ riesco a determinare $p_m(x)$
(UNICA!)

2) APPROSSIMAZIONE

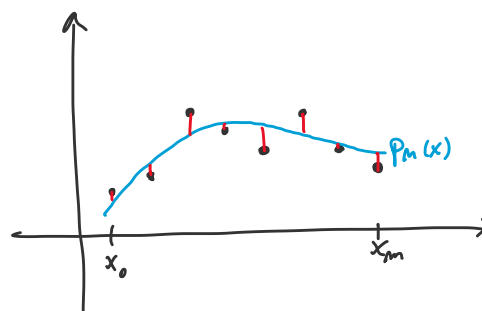
→ APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

DATI	
x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	
x_m	y_m

$m+1$ punti

$m \gg n$

cerco un



$$p_m(x) \in \mathbb{P}_m$$

tale che la differenza tra $p_m(x_i)$ e y_i sia minima:

$$\sum_{i=0}^m (y_i - \underbrace{g^*(x_i)}_{\text{voglio } g^*})^2 w(x_i) = \min_{g \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=0}^m (y_i - g(x_i))^2 w(x_i)$$

funzione peso

cerco tra tutte le $g \in \mathbb{P}_m$ quella che minimizza

→ APPROSSIMAZIONE UNIFORME (min - max)

cambio la condizione per la scelta di g^* in:

$$\max_{i=0, \dots, m} |y_i - g^*(x_i)| = \min_{g \in \mathbb{P}_m} \max_{i=0, \dots, m} |y_i - g(x_i)|$$

NOTA: Se i dati vengono da una funzione continua: $y_i = f(x_i)$. Si considera sempre volutamente un numero di punti discreto

Noi ci concentreremo su:

- INTERPOLAZIONE POLINOMIALE
- APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI