

ESERCIZIO (PICARD)

$f(x) = e^{x^2/2} - 2x$ ha due radici α_1, α_2 in $I = [0.5, 1.5] = [a, b]$

A) Trovare I_1, I_2 sottointervalli di I ($I_1 \cup I_2 = I, I_1 \cap I_2 = \emptyset$) che contengono rispettivamente α_1 e α_2

B) Dato lo schema di punto fisso

$$x_{k+1} = g(x_k) = e^{x_k^2/2} - x_k$$

- In quale sottointervallo (I_1 o I_2) converge?
- Calcolare x_1, x_2, x_3 partendo da $x_0 = 0.5$
- Verificare l'ordine di convergenza e stimare la costante n

Risoluzione

(A) Devo verificare la condizione di esistenza:

$$f(0.5) = 0.13$$

$$f(1.5) = 0.08$$

$\Rightarrow$ devo scegliere un punto $\bar{x} \in (0.5, 1.5)$ per cui $f(\bar{x}) < 0$, in modo da avere esistenza nei sottointervalli

$$I_1 = [a, \bar{x}], \quad I_2 = [\bar{x}, b]$$

Provo $\bar{x} = 1.0$: $f(1.0) = -0.35$ ✓

$\rightarrow$ Definisco $I_1 = [0.5, 1]$ e $I_2 = [1, 1.5]$

(B) Schema di punto fisso : $x_{k+1} = g(x_k) = e^{x_k^2/2} - x_k$

- Verifico la condizione di convergenza sulla $g(x)$, per selezionare in quale sottointervallo I_1 o I_2 lavorare.

$$g'(x) = x e^{x^2/2} - 1 \quad \rightarrow \quad g'(x) \text{ è crescente}$$

$$\text{Voglio } |g'(x)| < 1 \quad \Rightarrow \quad g'(0.5) = -0.43$$

$$g'(1) = 0.64$$

$$g'(1.5) = 3.62$$

$\Rightarrow$ La condizione è verificata in $I_1 = [0.5, 1.0]$

- Calcolare x_1, x_2, x_3 partendo da $x_0 = 0.5$:

$$x_1 = g(0.5) = 0.633148$$

SCAERI

- - - - -

$$x_2 = g(0.633148) = 0.588790$$

$$x_3 = g(0.588790) = 0.600477$$

$$\leadsto |e_2| = |x_2 - x_1|$$

$$\leadsto |e_3| = |x_3 - x_2|$$

• Considero $\alpha \approx x_3$.

→ Calcolo $g'(x_3)$ ($\neq 0 \Rightarrow p=1$)

→ $M \approx \frac{|e_3|}{|e_2|}$ uso il rapporto degli scarti per stimare π

ESERCIZIO

$f(x) = e^{-x/4} \cos x$ ha una radice α in $I = [-2, 1]$

Determinare il punto $x_0 \in I$ in modo che il metodo di Newton converga alla soluzione α (giustificando la risposta).

Risoluzione

La $f(x)$ è concava nell'intervallo considerato

(convinità verso il basso, $f'' < 0$).

La $f'(x)$ si annulla dove $\cos(x) = \frac{1}{4} \sin(x)$

oss. $\cos x = \sin x$ per $x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f'(x)$ si annulla in un x^* interno a $(-\pi/4, 0)$

Quindi scelgo x_0 più piccolo di x^* : $x_0 = -\pi/4$

k	x_k	$ e_k $	$ e_k / e_{k-1} ^2$
0	-0.785398	-	-
1	-2.11873	1.33333	-
2	-1.58925	0.529486	0.297836
3	-1.57088	$0.183668 \cdot 10^{-1}$	$0.655125 \cdot 10^{-1}$
4	-1.57080	$0.826283 \cdot 10^{-4}$	0.244942

$\leadsto \pi$
come
rapporto
degli scarti

$$\left| \frac{f''(x_4)}{2f'(x_4)} \right| = 0.25 \leadsto \pi \text{ come approssimazione } \alpha \approx x_4$$

