

2_Esempio1 - Metodo di Picard

lunedì 18 marzo 2024 16:20

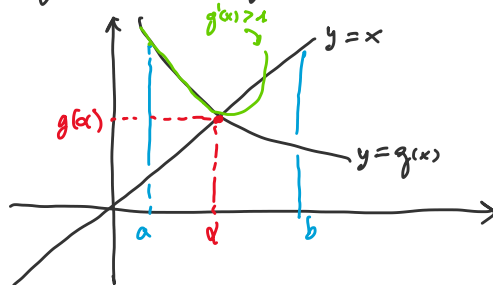
PROBLEMA : $x = \operatorname{arctg}(3x+2)$ **Metodo di Picard :** dato x_0 , $x_{k+1} = \operatorname{arctg}(3x_k+2)$

- (A) Dimostrare ESISTENZA e UNICITA' di α in $I=[1,2]$
- (B) Calcolare x_1, x_2, x_3 e x_4 partendo da x_0 scelto opportunamente
- (C) Determinare l'ordine di convergenza p e la costante asintotica M
- (D) Dare una maggiorazione a ϵ_k

Risoluzione

(A) Dobbiamo verificare le condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità del punto fisso.

- se $g(a) > a$ e $g(b) < b \Rightarrow \exists$ almeno una soluzione α



$$\operatorname{arctg}(1+2) = 1.373 > 1 \quad \checkmark$$

$$\operatorname{arctg}(6+2) = 1.446 < 2 \quad \checkmark$$

- se $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists!$ soluzione α

$$g'(x) = \frac{3}{1+(3x+2)^2} \quad (\text{oss. } \epsilon \text{ decrescente per } x \text{ crescente})$$

$$\hookrightarrow g'(1) = \frac{3}{1+5^2} = \frac{3}{26} < 1$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [1,2]$$

(B) Partiamo con $x_0 = 1$

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	$g'(x_k)$
-----	-------	-------------------	-----------

0	1	—	$\frac{3}{26} = 0.1154$
1	0.13734×10^{-1}	0.3734	0.7801×10^{-1}
2	0.14088×10^{-1}	0.3543×10^{-1}	0.7543×10^{-1}
3	0.14116×10^{-1}	0.2718×10^{-2}	0.7524×10^{-1}
4	0.14118×10^{-1}	0.2048×10^{-3}	0.7534×10^{-1}

(C) Ordine di convergenza p e costante M

SAPPIAMO CHE:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p} = M$$

Come si calcolano p e M per Picard?

Assumiamo che $|E_k| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$

$$E_k = \alpha - x_k \Rightarrow x_k = \alpha + E_k$$

$$x_{k+1} = g(x_k) \leadsto \alpha + E_{k+1} = g(\alpha + E_k) =$$

$$= g(\alpha) + E_k g'(\alpha) + \frac{E_k^2}{2} g''(\alpha) + \dots$$

$$\Rightarrow E_{k+1} = E_k g'(\alpha) + \frac{E_k^2}{2} g''(\alpha) + \frac{E_k^3}{6} g'''(\alpha) + \dots$$

se $g'(\alpha) \neq 0$ ALLORA $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p} = |g'(\alpha)| = M$

se $g'(\alpha) = 0$
 $g''(\alpha) \neq 0$ ALLORA $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p} = \frac{1}{2} |g''(\alpha)| = M$

Pero in generale: non conosciamo E_k e nemmeno α

$\Rightarrow$ usiamo lo sconto al posto dell'errore

$$|E_k| \leq \frac{M}{1-M} |E_k| \leadsto \text{se } M < \frac{1}{2} \text{ lo sconto \u00e8 una maggioranza dell'errore}$$

(si comportano asintoticamente allo stesso modo!)

$$\text{quindi: } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|} = M = |g'(\alpha)|$$

stimiamo M facendo il rapporto tra lo sconto a iterazioni

nuccemve

Nel nostro caso: $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \approx \text{cost} \Rightarrow g'(\alpha) \neq 0$
 (nel nostro caso $g'(x) \neq 0$)

$$\frac{|e_4|}{|e_3|} \approx 0.07534$$

$$\frac{|e_3|}{|e_2|} \approx 0.07523$$

$$\Rightarrow M = 0.075 \approx |g'(\alpha)|$$

$$(D) \quad |E_k| \leq ?$$

ni usa anche qui la relazione con lo scarto:

$$|E_k| \leq |e_k| = 0.2048 \times 10^{-3}$$