

2D-Altri metodi "Newton-like"

martedì 19 marzo 2024 18:35

Riassunto

- Metodo di Ricard : $x_{k+1} = g(x_k)$

Ipotesi : g regolare , $|g'(\alpha)| < 1 \rightarrow \text{CONVERGE}$
 $p = 1$
 $M = |g'(\alpha)|$

$$|E_k| \leq \frac{M}{1-M} |e_k| \quad \text{relazione tra scarto e errore}$$

$$\text{se } M < \frac{1}{2} \Rightarrow |E_k| \leq |e_k|$$

- Metodo di Newton - Raphson : $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = g_N(x_k)$

$$g'_N(\alpha) = 0 \quad g''_N(\alpha) \neq 0 \quad \leadsto \quad p = 2 \quad M = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right|$$

$f'(\alpha) \neq 0$

OSS.

$$|g'_N(\alpha)| = 0 \Rightarrow |g'_N(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in I_\alpha$$

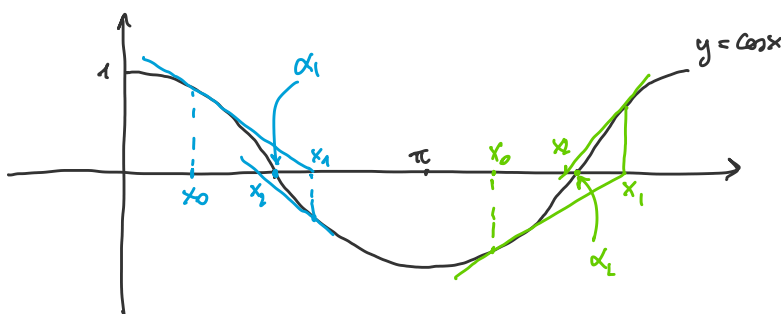
$$\Rightarrow |E_k| \leq |e_k|$$

Metodi iterativi dipendono da x_0 (da scegliere vicino a α)

Esempio (tramite l'interpretazione grafica)

$$f(x) = e^{-x} \cos x = 0$$

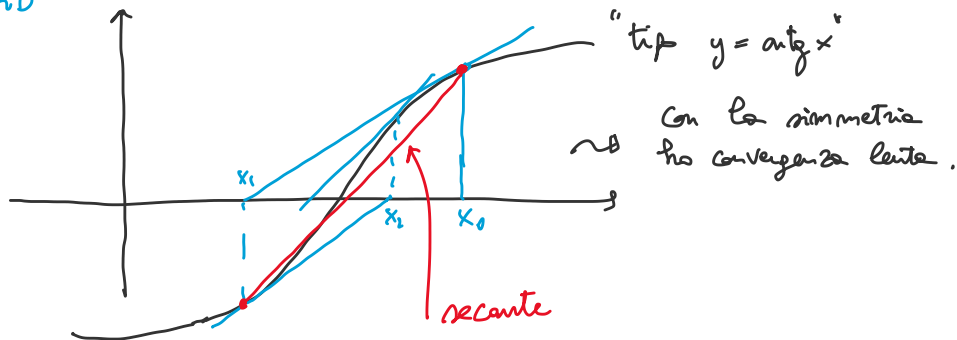
OSS. $e^{-x} > 0 \Rightarrow f(x)$ ha gli stessi zeri di $\cos x$



↳ In pratica che troviamo dipende da x !

$\Rightarrow x_0$ deve essere sufficientemente vicino a α
e il metodo di Newton converge velocemente

Esempio



IN QUESTO CASO

OSSERVAZIONE: Se invece della tangente in x_0 , utilizzo la secante tra due punti x_0 e $x_1 \Rightarrow$ ottengo in 1 iterazione una buona approssimazione di α

IDEA. Possiamo costruire un metodo che utilizza la secante per la costruzione della sequenza $\{x_k\}$.
(Utile anche nei casi in cui non conosco $f'(x)$)

METODO DELLA SECANTE VARIABILE o REGULA FALSI

Si parte dal metodo di Newton:

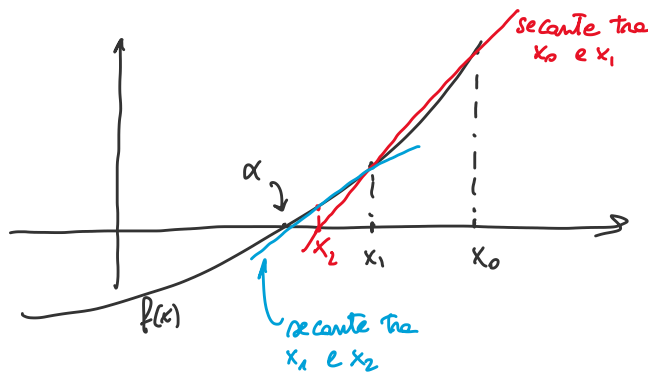
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

sostituire la derivata con la sua approssimazione lineare tra x_k e x_{k-1}

$$f'(x_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. limite} \\ \text{del rapporto incrementale}}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_k) - f(x_k - h)}{h} \Rightarrow f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Metodo "Regula Falsi": x_0, x_1 soluzioni iniziali

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



ANALISI NUMERICA

$$e_k = x_k - \alpha \quad x_k = \alpha + e_k$$

$$g_{\text{ref}}(x_k) = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

↳ approssimiamo $|e_k| \rightarrow 0$ e vediamo di calcolare p e M :

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$\cancel{\alpha} + e_{k+1} = \cancel{\alpha} + e_k - f(\cancel{\alpha} + e_k) \frac{\cancel{\alpha} + e_k - \cancel{\alpha} - e_{k-1}}{f(\cancel{\alpha} + e_k) - f(\cancel{\alpha} + e_{k-1})}$$

(prima di fare lo sviluppo di Taylor, me lo riscrivo:)

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= \frac{e_k f(\cancel{\alpha} + e_k) - e_k f(\cancel{\alpha} + e_{k-1}) - \cancel{e_k} f(\cancel{\alpha} + e_k) + e_{k-1} f(\cancel{\alpha} + e_k)}{f(\cancel{\alpha} + e_k) - f(\cancel{\alpha} + e_{k-1})} \\ &= \frac{e_{k-1} f(\cancel{\alpha} + e_k) - e_k f(\cancel{\alpha} + e_{k-1})}{f(\cancel{\alpha} + e_k) - f(\cancel{\alpha} + e_{k-1})} \\ &= \frac{e_{k-1} \left[\cancel{f(\alpha)} + e_k f'(\alpha) + \frac{e_k^2}{2} f''(\alpha) + \dots \right] - e_k \left[\cancel{f(\alpha)} + e_{k-1} f'(\alpha) + \frac{e_{k-1}^2}{2} f''(\alpha) + \dots \right]}{f(\cancel{\alpha}) + e_k f'(\alpha) + \frac{e_k^2}{2} f''(\alpha) + \dots - \cancel{f(\alpha)} - e_{k-1} f'(\alpha) - \frac{e_{k-1}^2}{2} f''(\alpha) - \dots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E_k \cancel{E_{k-1}} f'(\alpha) + E_{k-1} \frac{E_k}{2} f''(\alpha) + \dots - \cancel{E_k E_{k-1}} f'(\alpha) - E_k \frac{E_{k-1}}{2} f''(\alpha) - \dots}{f'(\alpha) (E_k - E_{k-1}) + f''(\alpha) \left(\frac{E_k^2}{2} - \frac{E_{k-1}^2}{2} \right) + \dots} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} E_{k-1} E_k f''(\alpha) (E_k - E_{k-1}) + \dots}{f'(\alpha) (E_k - E_{k-1}) + \dots} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} E_k E_{k-1} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} E_{k-1} \right| = 0$$

$\downarrow$
 0

↳ convergenza superlineare.

(Non ho $p=2$ perché ho un E_{k-1} , ma $p>1$
 Si può dimostrare che $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618..$)

In generale, si può scrivere uno schema generico:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{C_k}$$

dove C_k è un' approssimazione di $f'(x_k)$:

- se $C_k = f'(x_k) \Rightarrow$ METODO DI NEWTON ($p=2$)
- se $C_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \Rightarrow$ REGOLA FALSI ($p=1.618..$)
(METODO DELLE SECANTI)
- se $C_k = f'(x_0) \Rightarrow$ METODO DELLA TANGENTE FISSA ($p=1$)
- se $C_k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow$ METODO DELLA SECANTE FISSA ($p=1$)

↳ la convergenza va verificata di caso in caso con le

condizioni vide in precedenza.