

2C-Metodo di Newton-Raphson

lunedì 11 marzo 2024 17:55

PROBLEMA: Trovare $\alpha : f(\alpha) = 0 \rightsquigarrow \alpha = g(\alpha)$

[Schema di Picard $x_{k+1} = g(x_k)$ $\leftarrow$ problema di punto fisso
 $\hookrightarrow$ converge se $|g'(\alpha)| < 1$

Per uno schema convergente $\left(\begin{array}{l} \{x_k\} \rightarrow \alpha \\ |E_k| \rightarrow 0 \end{array} \right)$

si possono definire ORDINE

DI CONVERGENZA p e COSTANTE ASINTOTICA M

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p} = M \quad (\text{se } p=1 \Rightarrow M < 1)$$

$p=2$ convergenza quadratica

DOMANDA: Dobbiamo risolvere $\{ f(x) = 0 \}$, come
 continuiamo un metodo di punto fisso per cui $p=2$?
 $\uparrow (g'(\alpha) = 0)$

METODO DI NEWTON (o NEWTON-RAPHSON)

Come si costruisce:

$$\boxed{f(x) = 0}$$

1. Costruiamo una successione $x_{k+1} = x_k + h_k \quad \forall k$

2. Pensiamo che $x_{k+1} = \alpha$. Allora, se f ha derivate
 continue, possiamo espandere in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} 0 = f(x_{k+1}) &= f(x_k + h_k) \stackrel{?}{=} \\ &= f(x_k) + h_k f'(x_k) + \underbrace{\frac{h_k^2}{2} f''(x_k)}_{\text{secondo ordine}} + \dots \end{aligned}$$

3. Trascuriamo i termini del secondo ordine ($\theta(h^2)$)

e otteniamo:

$$0 = f(x_k) + h_k f'(x_k)$$

da cui:

$$h_k = - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (\text{se } f'(x_k) \neq 0)$$

⇒ Possiamo definire lo schema come:

$$x_0 \text{ arbitrario}$$

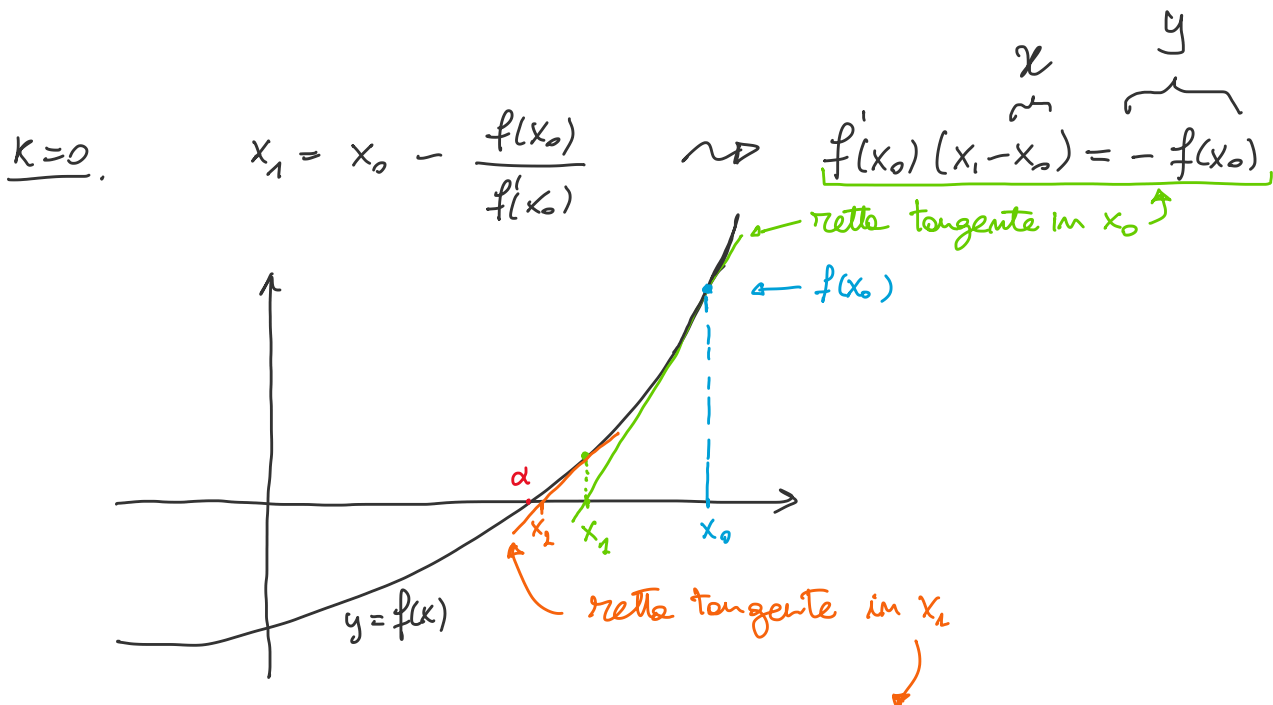
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = g_N(x_k)$$

$\uparrow$ $x_k + h_k$ $\uparrow$ se visto come schema di punto fisso

METODO DI NEWTON

Interpretazione geometrica (caso standard)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{con } x_0 \text{ arbitrario}$$



$k=1$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \leadsto f'(x_1)(x_2 - x_1) = -f(x_1)$

ALGORITMO del METODO DI NEWTON-RAPHSON

problema : $f(x)=0$

schema : x_0 iniziale

INPUT : $f, f', x_0, \tau, \text{IMAX}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = g_N(x_k)$$

OUTPUT : x_{k+1}

test di arresto : $|x_{k+1} - x_k| < \tau$

$$x_k = x_0$$

$$SCARTO = \tau + 1;$$

$$ITER = 0;$$

WHILE (SCARTO > τ && ITER < IMAX)

$$ITER = ITER + 1;$$

$$x_{k+1} = g_N(x_k, f, f');$$

scritto come
function ancora
da specificare

$$SCARTO = ABS(x_{k+1} - x_k);$$

$$x_k = x_{k+1};$$

END WHILE

function

$$[VAL] = g_N(x, f, f')$$

$$VAL = x - \frac{f(x)}{f'(x)};$$

uso la struttura
di algoritmo del
metodo di punto fisso,
vado a crearla la
 $g_N(x)$ che mi serve
per il metodo di Newton

CONVERGENZA DELLO SCHEMA

- CONSISTENZA (sostituisco α a x_k, x_{k+1})

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

- STABILITA' (come metodo di punto fisso sappiamo
che $|E_k| \rightarrow 0$ se $|g'(\alpha)| < 1$)

$$g_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'_N(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

↳ valutiamola nel punto α :

$$g'_N(\alpha) = \frac{f(\alpha) f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0 \leadsto \begin{array}{l} \text{perché } f(\alpha) = 0 \\ \text{e } f'(\alpha) \neq 0 \end{array}$$

$\swarrow$ in un intorno di α
 il metodo di Newton
 è convergente (devo scegliere
 x_0 vicino a α)

$$g'_N(x) = \frac{(f'(x))^3 f''(x) - 2f(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^4}$$

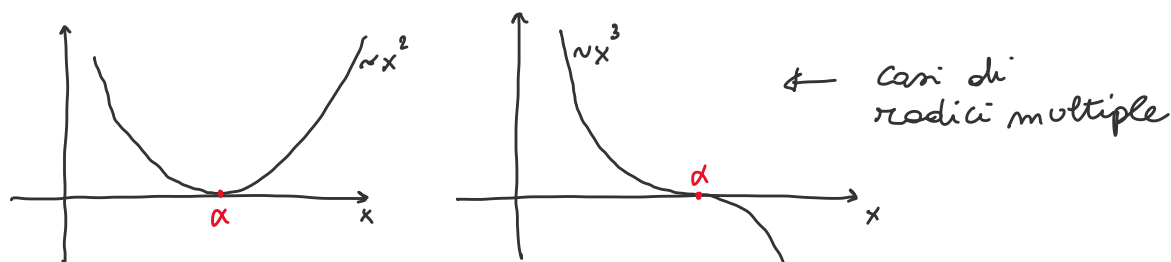
$\swarrow$ $g''_N(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$

Quindi: $g'(\alpha) = 0$
 $g''(\alpha) \neq 0$ (se $f'(\alpha) \neq 0$)

$$\Rightarrow p = 2 \quad \text{e} \quad M = \frac{1}{2} \left| g''(\alpha) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right|$$

ordine e costante asintotica di convergenza

OSSERVAZIONE: Cosa succede se $f'(\alpha) = 0$?



Esempio: $f(x) = (x-1)^2 \leadsto \alpha = 1$
 $f'(x) = 2(x-1) \leadsto f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
 $f''(x) = 2 \neq 0 \quad \forall x$

$$g_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'_N(x) = \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad f(\alpha) = 0 \quad f'(\alpha) = 0 \quad f''(\alpha) \neq 0$$

$\swarrow$ vediamo

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g'_N(x) = f''(\alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} =$$

TEOREMA DI

DE L'HOPITAL $\rightarrow$ (H) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)} = \frac{1}{2} < 1$

Quindi: lo schema di Newton converge anche
 α $f'(\alpha) = 0$ MA con ordine $p=1$ e $M=\frac{1}{2}$!
 (caso di radici multiple)

Vediamo l'analisi dell'errore:

METODO DI
NEWTON

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$E_k = \alpha - x_k$$

$$x_k = \alpha + E_k \quad \text{con } |E_k| \rightarrow 0$$

usiamo questa per
scrivere i punti calcolati
in α + errore

$$\alpha + E_{k+1} = \alpha + E_k - \frac{f(\alpha + E_k)}{f'(\alpha + E_k)}$$

Usiamo l'espansione di Taylor:

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(\alpha) + E_k f'(\alpha) + \frac{E_k^2}{2} f''(\alpha) + \dots}{f'(\alpha) + E_k f''(\alpha) + \frac{E_k^2}{2} f'''(\alpha) + \dots}$$

$$= \frac{E_k f'(\alpha) + E_k^2 f''(\alpha) + \dots - f(\alpha) - E_k f'(\alpha) - \frac{E_k^2}{2} f''(\alpha) - \dots}{f'(\alpha) + E_k f''(\alpha) + \dots}$$

• se $f'(\alpha) \neq 0$ (RADICE UNICA): $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^2} = \frac{1}{2} \frac{|f''(\alpha)|}{|f'(\alpha)|} = \eta$
 $p = 2$

• se $f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) \neq 0$ (RADICE DOPIA)

$$E_{k+1} = \frac{E_k^2 f''(\alpha) + \dots - \frac{E_k^2}{2} f''(\alpha) - \dots}{E_k f''(\alpha) + \frac{E_k^2}{2} f'''(\alpha) + \dots}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|} = \frac{1}{2} \quad p = 1$$

$$M = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO: $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$

$$f'(x) = 2x - 3$$

SCHEMA DI NEWTON:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k + 2}{2x_k - 3} =$$

$$= \frac{2x_k^2 - 3x_k - x_k^2 + 3x_k - 2}{2x_k - 3} = \frac{x_k^2 - 2}{2x_k - 3} = g_3(x_k)$$

$\uparrow$
 esempio delle
 lez. precedenti

Metodo di Newton modificato (per radici multiple)

Riprendiamo la relazione sull'errore:

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(\alpha + e_k)}{f'(\alpha + e_k)} \quad \leadsto \quad \begin{matrix} f'(\alpha) = 0 \\ f''(\alpha) \neq 0 \end{matrix} \quad p=1 \quad M = \frac{1}{2}$$

Voglio ripristinare ordine di convergenza $p=2$ anche nel caso di radici doppie:

$$e_{k+1} = e_k - 2 \left[\frac{\frac{e_k^2}{2} f''(\alpha) + \frac{e_k^3}{6} f'''(\alpha) + \dots}{e_k f''(\alpha) + \frac{e_k^2}{2} f'''(\alpha) + \dots} \right] =$$

$$= \frac{\cancel{e_k^2 f''(\alpha)} + \frac{e_k^3}{2} f'''(\alpha) + \dots - \cancel{e_k^2 f''(\alpha)} - \frac{e_k^3}{3} f'''(\alpha) + \dots}{e_k f''(\alpha) + \frac{e_k^2}{2} f'''(\alpha) + \dots}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} e_k^3 f'''(\alpha)}{\cancel{e_k f''(\alpha)}} + o(e_k^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{6} \left| \frac{f'''(\alpha)}{f''(\alpha)} \right| = M \quad \underline{p=2}$$

↳ Quindi, in generale:

Se $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(r-1)}(x) = 0$, cioè x è una radice con molteplicità r [es. $(x-1)^2 = 0$]

METODO DI NEWTON MODIFICATO (per radici multiple)

$$x_{k+1} = x_k - r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

ha ancora convergenza $p=2$.