

2B-Problema di punto fisso

lunedì 11 marzo 2024 17:46

PROBLEMA 1: Trovare x tale che $f(x) = 0$

↓

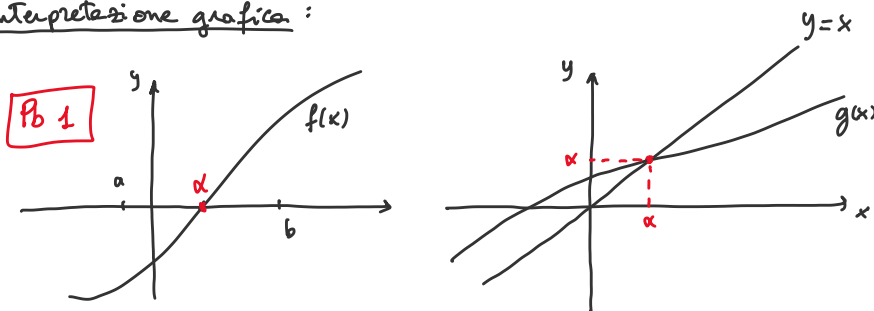
Riscriviamo il problema in modo equivalente come:

$$f(x) = x - g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$$

 $\Rightarrow$

$$x = g(x) \quad \text{PROBLEMA DI PUNTO FISSO}$$

Interpretazione grafica:

PROBLEMA 2: Data $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a valori reali,
trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $x = g(x)$

Le considerazioni fatte sulle proprietà di $f(x)$ per il Pb 1si possono estendere al Pb 2 e la funzione $g(x)$:* $g(x)$ continua in $[a, b]$ $g(x)$ si chiama
FUNZIONE DI PUNTO FISSO* per l'esistenza e unicità
della soluzione (o punto fisso) ↓CONDIZIONI SUFFICIENTI PER ESISTENZA E UNICITA'

1) $g(a) > a$ e $g(b) < b \Rightarrow g(I) \subset I$
 ↑
 per ESISTENZA con $I = [a, b]$

2) $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$
 ↑
 per UNICITA'

SCHEMA NUMERICO ITERATIVO (immediato)Schema delle iterazioni successive o di PICARD• Dato $x_0 \in [a, b]$ soluzione iniziale,

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

(accetto x_k che verifica un certo test di arresto)

Esempio

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2$$

Trasformiamo in un problema di punto fisso $x = g(x)$

$$1) \quad x^2 = 3x - 2 \Rightarrow x = \sqrt{3x - 2} = g_1(x)$$

$$2) \quad x = \frac{x^2 + 2}{3} = g_2(x)$$

$$3) \quad \text{somma a } dx \text{ e } 2x \quad x^2$$

$$x = \frac{x^2 - 2}{2x - 3} = g_3(x)$$

$$\hookrightarrow \text{SCHEMA} \quad x_{k+1} = g(x_k)$$

Consistenza ($g(\alpha) = \alpha$)

Pb 1. $g_1(\alpha_1) = 1 = \alpha_1$ $\Rightarrow$ consistenza forte
 $g_1(\alpha_2) = \alpha_2$

Pb 2. $g_2(\alpha_1) = \alpha_1$ ✓
 $g_2(\alpha_2) = \alpha_2$

Pb 3. $g_3(\alpha_1) = \frac{1-2}{2-3} = 1 = \alpha_1$ ✓
 $g_3(\alpha_2) = \frac{4-2}{4-3} = 2 = \alpha_2$

[anche per il Pb con $f(x) = 0$
 SCHEMA: $f(x_k) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$ da la consistenza

Sperimentiamo

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{con} \quad x_0 = 3 \quad \left(\text{sto considerando un intervallo } [a, b] \text{ intorno a } x_2 \right)$$

①

k	x_k	$g_1(x_k) = \sqrt{3x_k - 2}$
0	3	$\sqrt{7} = 2.6458$
1	2.6458	2.4367
2	2.4367	2.3043

	$\vdots$	
6	2.1563	2.1140
7	2.1140	2.0837
		$\downarrow k \rightarrow \infty$
		sembra convergere verso $\alpha_2 = 2$
		<u>CONVERGE</u> ("lentamente")

②

k	x_k	$g_2(x_k) = \frac{x_k^2 + 2}{3}$
0	3	3.667
1	3.667	5.1481

$\rightarrow$ cresce
DIVERGE

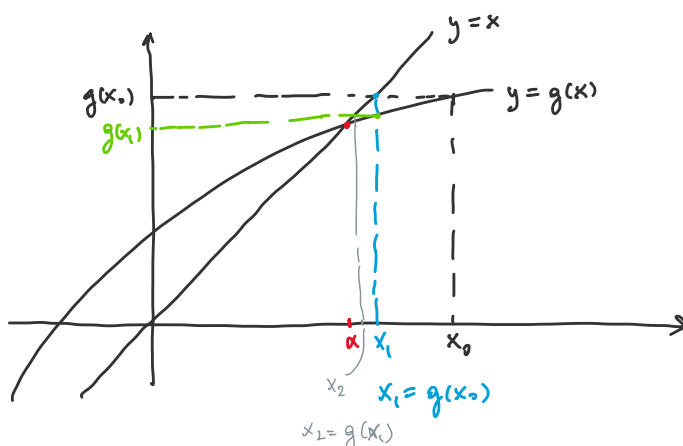
③

k	x_k	$g_3(x_k) = \frac{x_k^2 - 2}{2x_k - 3}$
0	3	2.3333
1	2.3333	2.0667
2	2.0667	2.00392
3	2.00392	2.000015

$\downarrow k \rightarrow \infty$
2 CONVERGE a $\alpha_2 = 2$
MOLTO VELOCEMENTE

Andiamo a studiare il perché di questi comportamenti:
ANALISI NUMERICA DEL METODO DI PICARD

Rappresentazione grafica di Picard



Dato la successione $\{x_k\}$ di soluzioni approssimate,

vogliamo studiare se $\{x_k\} \rightarrow \alpha \quad k \rightarrow \infty$
CONVERGENZA

METODO DI PICARD

x_0 arbitrario

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad k=0,1,2,\dots$$



E' vero che converge?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha ?$$

oppure equivalentemente

$$\text{Errore } \varepsilon_k = x_k - \alpha$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \alpha| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_k| = 0 ?$$

Terminiamo all' esempio

* Consideriamo $x_{k+1} = g_1(x_k)$, abbiamo visto dai calcoli che ci converge lentamente a $\alpha = 2$

k	0	1	2	3	...
$ \varepsilon_k $	1	0.646	0.437	0.304	... (diminuisce)

$$\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|} \simeq 0,73 \quad \text{costante al variare di } k$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{k+1}| \sim 0,73 |\varepsilon_k| \quad \forall k$$

Proviamo a calcolare la derivata di $g_1(x)$ in α :

$$g_1'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \Big|_{x=2} = \frac{3}{4} = 0,75 < 1$$

* Consideriamo $x_{k+1} = g_2(x_k)$

k	0	1	2	
$ \varepsilon_k $	1	1.6667	...	$\rightarrow$ cresce

$$\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|} > 1$$

$$g_2'(x) = \frac{2}{3} \times \Big|_{x=2} = \frac{4}{3} > 1$$

* Consideriamo $x_{k+1} = g_3(x_k)$

k	0	1	2	3	...
$ E_k $	1	0.333	0.0666	...	...

→ diminuisce
velocemente

$$g'_3(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - 3} \Big|_{x=2} = 0 < 1$$

→ IDEA: Lo schema converge se esiste una costante $M < 1$ tale che $|E_{k+1}| \leq M |E_k|$

CONDIZIONI PER LA CONVERGENZA:

x_0 arbitrario

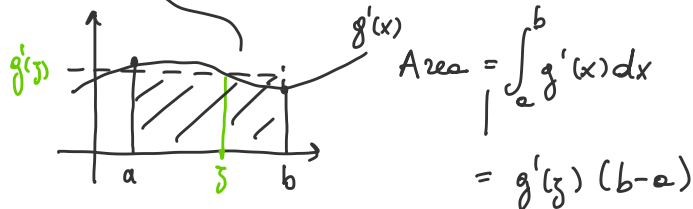
$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{con} \quad \alpha = g(\alpha)$$

Possiamo scrivere:

$$\underbrace{\alpha - x_1}_{E_1} = g(\alpha) - g(x_0) = g'(\xi_0) \underbrace{(\alpha - x_0)}_{E_0} \quad \text{con } \xi_0 \in [x_0, \alpha]$$

per il Teorema del valore medio

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(x) dx = g'(\xi)(b-a) \quad \text{con } \xi \in [a, b]$$



$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha - x_2}_{E_2} &= g(\alpha) - g(x_1) = g'(\xi_1) \underbrace{(\alpha - x_1)}_{E_1} \quad \text{con } \xi_1 \in [x_1, \alpha] \\ &= g'(\xi_1) g'(\xi_0) \underbrace{(\alpha - x_0)}_{E_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha - x_{k+1}}_{E_{k+1}} &= g(\alpha) - g(x_k) = g'(\xi_k) \underbrace{(\alpha - x_k)}_{E_k} \quad \text{con } \xi_k \in [x_k, \alpha] \\ &= g'(\xi_k) g'(\xi_{k-1}) \dots g'(\xi_1) g'(\xi_0) \underbrace{(\alpha - x_0)}_{E_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |E_{k+1}| \leq |g'(\xi_k) \cdot \dots \cdot g'(\xi_0)| |E_0|$$

$$\text{DEFINISCO } M = \max_{j=0, \dots, k} |g'(\xi_j)| \quad \text{allora}$$

$$|E_{k+1}| \leq M^{k+1} |E_0| \quad \text{e quindi}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_{k+1}| = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{k+1} |\varepsilon_0| = 0 \iff M < 1$$

Da qui possiamo dire che:

$$\text{se } |g'(x)| < 1 \text{ per } x \in [\alpha - x_0, \alpha + x_0] \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_k| = 0$$

CONDIZIONE
SUFFICIENTE

se in un punto ho derivata
 $|g'(x)| > 1$, lo schema
potrebbe comunque convergere

Inoltre, x_0 non è stato specificato. Posso prenderlo vicino a α .

⇒ Quindi la condizione di convergenza di Picard

$$\text{si traduce in: } |g'(x)| < 1 \text{ per } x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$$

I_α
intervallo di α

↳ Se assumiamo anche $g'(x)$ continua,

$$\text{questo si traduce in: } \underbrace{|g'(\alpha)| < 1}_{\text{CONDIZIONE DI CONVERGENZA}}$$

OSS. Ovviamente se possiamo dire $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a, b]$
la condizione è soddisfatta.

VELOCITA' DI CONVERGENZA

Quanto veloce converge $\{x_k\}$ a α ?

Assumiamo la convergenza $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_k| = 0$
ERRORE

$$\varepsilon_k = x_k - \alpha \Rightarrow x_k = \alpha + \varepsilon_k \quad (\text{con } \varepsilon_k \rightarrow 0)$$

Possiamo riscrivere $x_{k+1} = g(x_k)$ come:

$$\alpha + \varepsilon_{k+1} = g(\alpha + \varepsilon_k) = g(\alpha) + \varepsilon_k g'(\alpha) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} g''(\alpha) + \dots$$

↑
uso l'espansione
in serie di Taylor

(* assumo $g(x)$
regolare)

↓

$$\cancel{\alpha} + \cancel{\varepsilon_{k+1}} = \cancel{g(\alpha)} + \varepsilon_k g'(\alpha) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} g''(\alpha) + \frac{\varepsilon_k^3}{6} g'''(\alpha) + \dots$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{k+1}| = \left| \varepsilon_k g'(\alpha) + \frac{\varepsilon_k^2}{2} g''(\alpha) + \frac{\varepsilon_k^3}{6} g'''(\alpha) + \dots \right|$$

$$\leq |\varepsilon_k| |g'(\alpha)| + \frac{1}{2} |g''(\alpha)| |\varepsilon_k|^2 + \dots$$

→

infinitesimi di ordine superiore

⇒ $|\varepsilon_{k+1}| \leq |\varepsilon_k| |g'(\alpha)|$ ci vede di nuovo che abbiamo bisogno di $|g'(\alpha)| < 1$

Per vedere quanto veloce decresce

l'errore:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(|g'(\alpha)| + \frac{1}{2} |g''(\alpha)| |\varepsilon_k| + \dots \right) =$$

$$= |g'(\alpha)| = M \quad \begin{array}{l} \text{COSTANTE ASINTOTICA} \\ \text{DI CONVERGENZA} \end{array}$$

OSSERVAZIONE. Se $g'(\alpha) = 0$ (esempio prec. $g'_3(\alpha) = 0$)

ci ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} |g''(\alpha)| + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} |g''(\alpha)| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{sono i termini} \\ \text{di secondo ordine} \\ \text{a comandare la} \\ \text{convergenza} \\ \Rightarrow \text{più veloce!} \end{array}$$

DEFINIZIONI

- Uno schema converge con ordine 1 (o LINEARE)

se

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M |\varepsilon_k|$$

ovvero $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|} = M > 0$ { abbiamo visto che $M < 1$

- Uno schema converge SUPERLINEARMENTE se

$$\frac{|E_{k+1}|}{|E_k|} \leq Q \rightarrow 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|} = 0$$

- Uno schema converge con ORDINE $p \geq 1$ se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^p} = M > 0$$

OSS. Se $p=1$ si torna al caso convergenza lineare e $M < 1$.

Se $p=2$ si dice anche convergenza QUADRATICA.

Esempio (precedente)

$$g_1 \leadsto |g'_1(\alpha)| = 0.75 < 1 \Rightarrow \text{convergenza lineare}$$

$$g_2 \leadsto |g'_2(\alpha)| > 1 \quad \text{NON converge}$$

$$g_3 \leadsto |g'_3(\alpha)| = 0 \Rightarrow p=2 \quad M = \frac{g''_3(\alpha)}{2} = 1$$

ALGORITHM - METODO DI PICARD

$$\begin{cases} x_0 \text{ sol. iniziale} \\ x_{k+1} = g(x_k) \quad k=0,1, \dots \end{cases}$$

INPUT $(g, x_0, \tau, \text{MAX})$

OUTPUT x_{k+1}

[posso fissare un numero massimo di iterazioni consentite]

$$x_k = x_0 ;$$

[valore (intero) con cui tenero traccia

ITER = 0 ; ← del numero di iterazioni

SCARTO = $\tau + 1$;

WHILE (SCARTO > τ & & ITER < (MAX))

ITER = ITER + 1 ;

$X_{k+1} = g(X_k)$;

SCARTO = $|X_{k+1} - X_k|$;

$X_k = X_{k+1}$;

END WHILE

AND
voglio che le
condizioni a c
sono entrambe

TEST DI ARRESTO : controllo se lo scarto $\bar{e} < \tau$

DOMANDA : Come si lega lo scarto all'errore ?

SCARTO $e_k = X_k - X_{k-1}$, ERRORE $E_k = \alpha - X_k$

Possiamo scrivere :

$$E_k = \alpha - X_k = \alpha - X_{k+1} + X_{k+1} - X_k$$

$$|E_k| \leq |\alpha - X_{k+1}| + |X_{k+1} - X_k| = |E_{k+1}| + |e_{k+1}|$$

per l'errore abbiamo

$$|E_{k+1}| \leq M |E_k| \Rightarrow \frac{|E_{k+1}|}{M} \leq |E_k|$$

Quindi :

$$\frac{|E_{k+1}|}{M} \leq |E_k| \leq |E_{k+1}| + |e_{k+1}| \quad \forall k$$

$$\Rightarrow |E_k| \leq \frac{M}{1-M} |e_k|$$

scarto e errore si
comportano asintoticamente
nello stesso modo !

⇒ posso usare lo scarto per verificare la bontà della soluzione approssimata.

Comportamento dell' errore :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|} = \mu$$

$$|\varepsilon_1| = \mu |\varepsilon_0|$$

$$|\varepsilon_2| = \mu |\varepsilon_1| = \mu^2 |\varepsilon_0|$$

;

$$\Rightarrow |\varepsilon_k| = \underbrace{\mu^k}_{\text{esponenziale}} |\varepsilon_0| \quad (\text{se } \mu < 1 \Rightarrow |\varepsilon_k| \rightarrow 0)$$

Passiamo al logaritmo :

$$\begin{aligned} \log |\varepsilon_k| &= \log (\mu^k |\varepsilon_0|) = \\ &= \log (\mu^k) + \log (|\varepsilon_0|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log (|\varepsilon_k|) = k \log (\mu) + \log (|\varepsilon_0|)}$$

↑ è una retta nel piano $(k, \log (|\varepsilon_k|))$

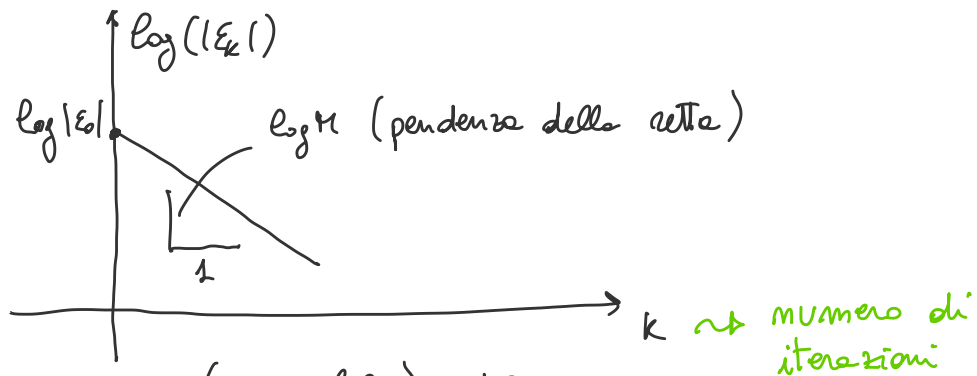


GRAFICO (o profilo) di
CONVERGENZA DEL METODO DI PICARD

