2A-Zeri di funzioni ⇝ Risolvere equazioni nonlineari

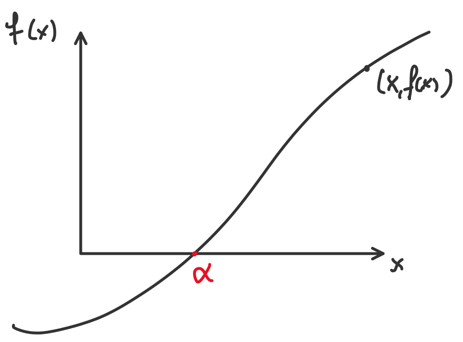
lunedì 11 marzo 2024 15:33

PROBLEMA: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione a valori reali, trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$

Se tale soluzione esiste, si indica $x = \alpha$ tale che $f(\alpha) = 0$

(α è detto ZERO o RADICE di f).

Interpretazione geometrica:



α è il valore per cui $f(\alpha) = 0$

EQUIVALENTE

Trovare il punto (o punti) di intersezione tra la retta $y = 0$ e la funzione $f(x)$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

DOMANDA: Il problema è ben posto?

1) La soluzione esiste
2) La soluzione è unica
3) La soluzione è funzione continua dei dati

Possiamo intanto dire qualcosa sulla condizione 3):

Se la $f(x)$ è continua in $[a,b]$ allora la condizione 3) è verificata

Idea:

f continua: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a,b]$

espando con Taylor

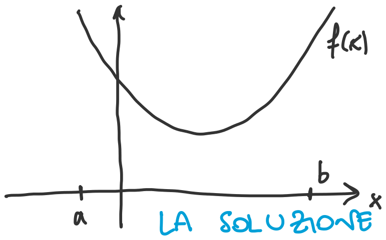
$$|f(\alpha + \delta x) - \underbrace{\cancel{f(\alpha)}}_{=0}| \leq |\cancel{f(\alpha)} + \delta x\, f'(\alpha) + \ldots| \leq$$

$$\leq L\,|\delta x| \quad \text{con } L = |f'(\alpha) + \ldots|$$

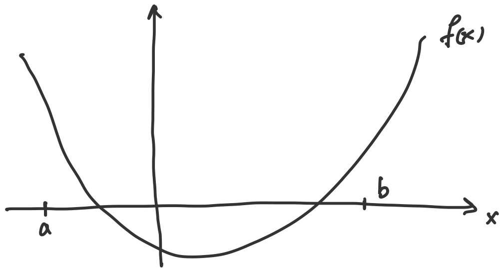
↳ considereremo f continue "quanto basta".

Vediamo cosa possiamo dire su ESISTENZA E UNICITÀ andando a "localizzare" qualitativamente le radici.

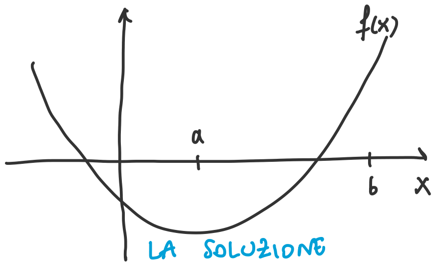
Ci possono essere vari casi:



LA SOLUZIONE NON ESISTE



ESISTONO DUE O PIÚ SOLUZIONI

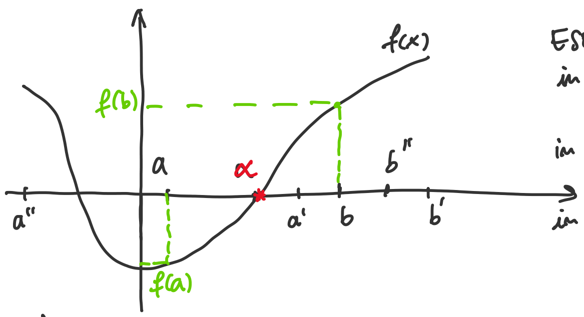


LA SOLUZIONE È UNICA!

Quindi, vogliamo formulare condizioni necessarie e sufficienti affinché il PROBLEMA $f(x)=0$ abbia una e una sola soluzione

↳ Trovare un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tale per cui esista una unica radice α di f.

DATI : $f : \mathrm{Dom}f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$



ESEMPIO:
in $[a', b']$ NON HO RADICI
in $[a'', b'']$ HO 2 RADICI
in $[a, b]$ HO SOLUZIONE UNICA!

↳ Intuitivamente: con f continua,

* se $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ ho almeno una soluzione in $[a,b]$

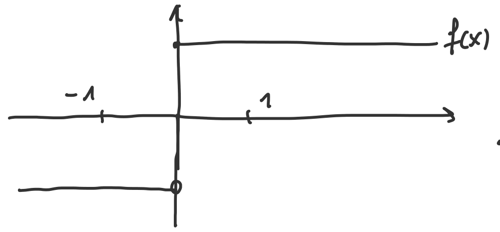
(quindi, se $f(a)<0$ e $f(b)>0$ oppure $f(a)>0$ e $f(b)<0$)

questa è una CONDIZIONE SUFFICIENTE (DI ESISTENZA)!

NOTA BENE: Serve la condizione di continuità di f.

Altrimenti, ESEMPIO:

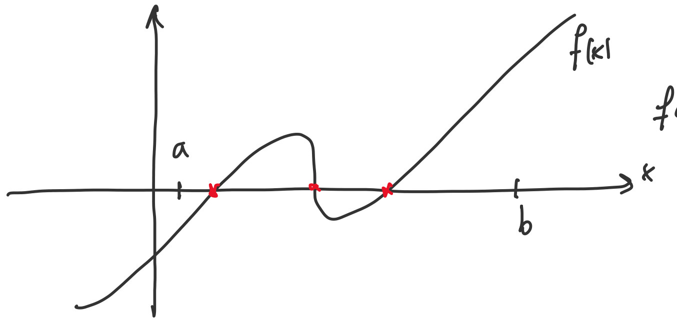
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



in $[a,b] = [-1,1]$

$\rightsquigarrow$ f cambia segno agli estremi ma non ha zeri.

NOTA BENE 2: La condizione sul cambio del segno di f negli estremi NON è necessaria per l'esistenza:

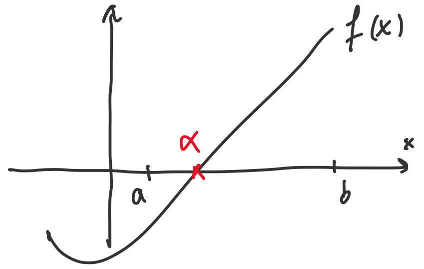


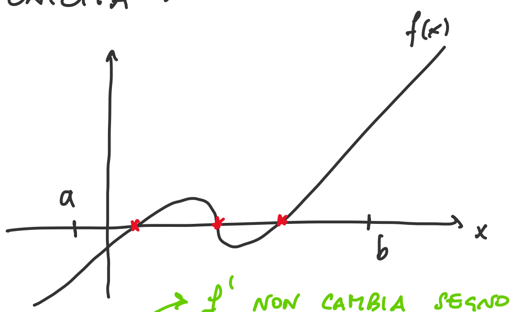
$f(a) \cdot f(b) < 0$ MA ho soluzioni multiple

Riassumiamo (TEOREMA)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ $(\mathcal{C}^0[a,b])$.
Allora l'intervallo $[a,b]$ contiene almeno una radice α
se $f(a) \cdot f(b) < 0$

PER QUANTO RIGUARDA L'UNICITA':





f' NON CAMBIA SEGNO ($f' > 0$ OPPURE $f' < 0$)

Intuitivamente: se f è monotona la soluzione è unica

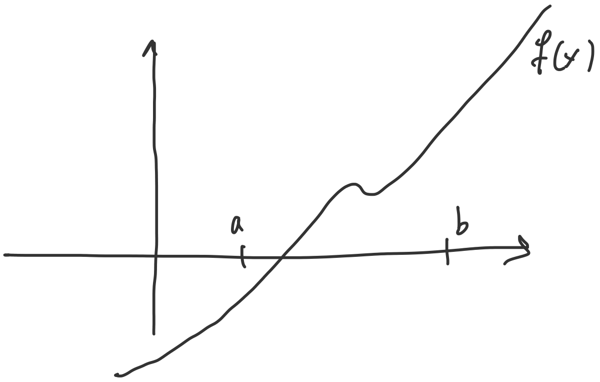
(CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'UNICITA')

Quindi si ha (TEOREMA)

Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0$ in (a,b), allora esiste una unica soluzione $\alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) = 0$.

NOTA. In particolare se f è monotona, f' è sempre positiva (o negativa) e soddisfa l'ipotesi

NOTA BENE. La condizione di permanenza del segno di f' non è condizione necessaria per l'unicità:



f' cambia segno in $[a,b]$

MA $\exists !$ soluzione

Vediamo ora uno SCHEMA NUMERICO per risolvere il problema: SCHEMA DICOTOMICO o BISEZIONE

Pb. $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(a)\cdot f(b)<0$.
Vogliamo trovare $\alpha \in [a,b]$ (che assumiamo unica) tale che $f(\alpha)=0$

ipotesi del pb.

SCHEMA NUMERICO

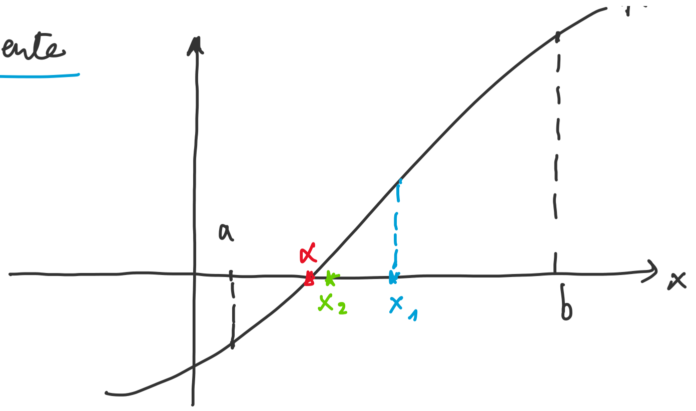
Partendo da un intervallo $I_0 := [s_0, d_0] = [a,b]$ che contiene la soluzione, si costruiscono due successioni $\{s_k\}$ e $\{d_k\}$ che convergono a α, rispettivamente da sinistra e da destra, e che individuano una successione di intervalli $I_k = [s_k, d_k] \subset [a,b]$ tali che

$$|I_k| = |d_k - s_k| \longrightarrow 0 \quad k \to \infty$$

$$\text{e} \quad \alpha \in I_k \quad \forall k$$

$f(x)$

Graficamente



$I_0 = [a, b]$

$s_0 = a \quad d_0 = b$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$x_1 = \frac{s_0 + d_0}{2} = \frac{a+b}{2}$ $\quad f(a) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow$ $s_1 = a$, $d_1 = x_1$ $\quad I_1 = [a, x_1]$

la soluzione $\alpha \in [a, x_1]$

($f(x_1) \cdot f(b) > 0 \Rightarrow$ scarto questo intervallo)

$x_2 = \frac{s_1 + d_1}{2}$ e verifico quale sottointervallo selezionare: $I_2 = [s_1, x_2]$ oppure $I_2 = [x_2, d_1]$

....

$\Rightarrow$ se $|d_k - s_k|$ è "piccolo abbastanza" allora posso fermarmi: ho trovato una "buona approssimazione di α"

Possiamo fissare una tolleranza τ e controllare quando $|d_k - s_k| < \tau$

* Come si verifica se la soluzione approssimata x_k è "buona"?

Possiamo vedere ERRORE, RESIDUO o SCARTO:

ERRORE $\quad |\varepsilon_k| = |\alpha - x_k| \longrightarrow$ quanto si distanzia il punto x_k dalla soluzione esatta
↳ usato per le stime
(in generale NON conosco α)

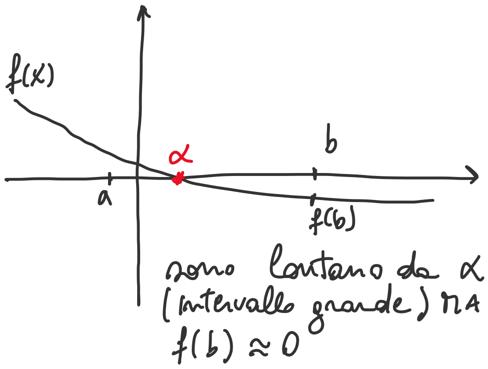
RESIDUO NON LINEARE $\quad |r_k| = |f(x_k)| \longrightarrow$ quanto si distanzia da zero il valore di $f(x_k)$
(stiamo studiando $f(x)=0$)

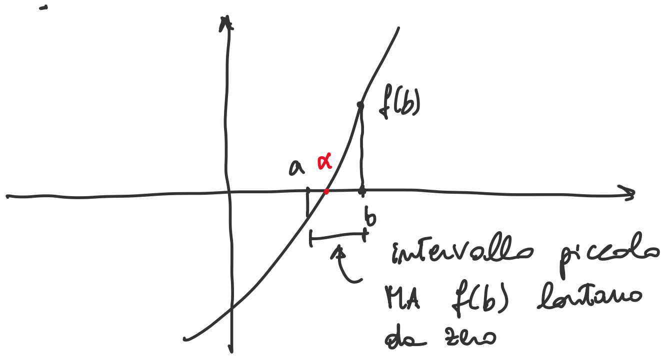
SCARTO $\quad |x_{k+1} - x_k| \longrightarrow$ differenza tra la soluzione approssimata di due passi consecutivi

Saranno le nostre condizioni di terminazione

(TEST DI ARRESTO) per interrompere il METODO ITERATIVO e accettare la soluzione x_k ottenuta

ATTENZIONE: Non sono equivalenti!





A seconda del metodo vedremo che Test di arresto selezionare.

<u>METODO ITERATIVO</u>: parto da una soluzione iniziale x_0 (il primo "GUESS") e definisco una successione $\{x_k\}$

$$\underbrace{x_0}_{\text{GUESS}},\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$$

Mi fermo quando soddisfo un TEST DI ARRESTO

<u>ALGORITMO DICOTOMICO</u>: INPUT $= (a, b, \tau)$ con $\alpha \in [a,b] = I_0$

k-esima iterazione (passo):

$$|I|_k = d_k - s_k$$

$$x_k = \frac{d_k + s_k}{2}$$

se $f(s_k) \cdot f(x_k) < 0$

$$s_{k+1} = s_k$$

$$d_{k+1} = x_k$$

altrimenti

$$s_{k+1} = x_k$$

$$d_{k+1} = d_k$$

Bisezione (a, b, τ)

```
SCARTO = τ + 1;          ← voglio iniziare da un valore > τ
s_k = a;  d_k = b;
WHILE (SCARTO > τ):      → FINCHÉ la condizione tra parentesi è VERA, esegui...
    x_k = (s_k + d_k) / 2;
    IF (f(x_k) == 0) THEN
        SCARTO = 0;      ~> x_k è proprio la soluzione
                            IMPONGO SCARTO = 0 PER USCIRE DAL CICLO
    ELSE
        IF (f(s_k) * f(x_k) < 0 THEN
            ~~s_k = s_k~~;   ← non serve assegnare lo stesso valore del passo precedente
            d_k = x_k;
        ELSE
            s_k = x_k;
            ~~d_k = d_k~~;
        END IF
        SCARTO = d_k - s_k;
    END IF
END WHILE
```

Analisi dello schema

per definizione dello schema : $\alpha \in I_k \quad \forall k$

quindi : $\quad |\varepsilon_1| = \underbrace{|\alpha - x_1| < \frac{1}{2}|d_0 - s_0|}_{} = \frac{1}{2}|b-a|$

x_1 è punto medio di I_0 al più è a distanza $|I_0|/2$ dalla soluzione

in generale :

$$|\varepsilon_k| = |\alpha - x_k| < \frac{1}{2}|d_k - s_k| = \frac{1}{2^{k+1}}|d_0 - s_0|$$

perché l'intervallo viene ogni volta dimezzato

$\Rightarrow$ $|\varepsilon_k| \searrow 0$ per $k \to \infty$

STABILITA'

$\Rightarrow$ La convergenza del metod