**SEGNALI E SISTEMI**
**Autovalutazione**
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
3 maggio 2023
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Siano dati i segnali a tempo discreto

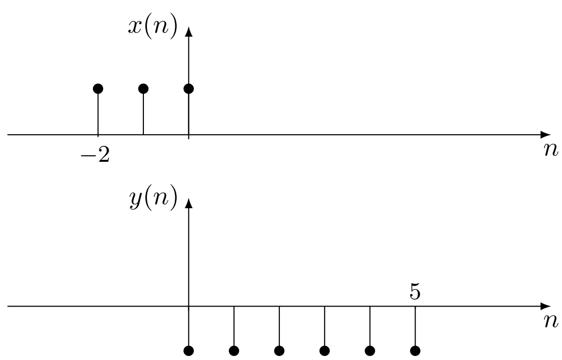
$$x(n) = \operatorname{rect}\left(\frac{n+1}{3}\right) , \qquad y(n) = -\operatorname{rect}\left(\frac{n-\frac{5}{2}}{6}\right) ,$$

e sia $z(t) = x * y(n)$ la loro convoluzione discreta. Si chiede di:

1. disegnare i segnali $x(n)$ e $y(n)$ [1 p];
2. calcolare la durata del supporto di $z(n)$ [1 p];
3. calcolare la convoluzione $z(n)$ [3 p];
4. calcolare $w(n) = x * q(n)$ con $q(n) = \operatorname{rect}(\frac{n-\frac{3}{2}}{6})$ [2 p].

*Soluzione.*

1. I segnali sono rappresentati in figura




2. Avendo $x(n)$ supporto $[-2, 0]$, e $y(n)$ supporto $[0, 5]$, per la regola del supporto della convoluzione, il supporto di $z$ è $[-2, 5]$.

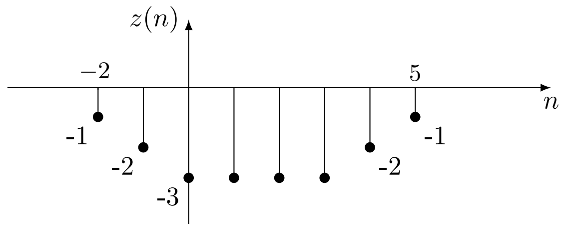
3. Osservando che

$$x(n) = \delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n)$$

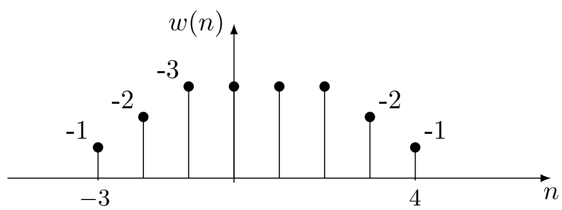
per la linearità della convoluzione si ha

$$z(n) = x * y(n) = y(n+2) + y(n+1) + y(n)$$

ovvero, graficamente:

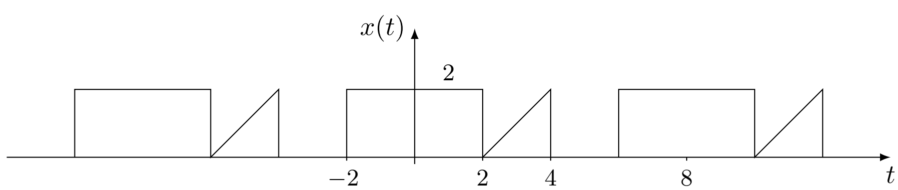



4. Poiché $q(n) = -y(n+1)$, allora per la regola della convoluzione di segnali traslati si ha $w(n) = -z(n+1)$.




**Esercizio 2 – [punti 7]**

Sia dato il segnale $x(t)$, periodico di periodo $T_p = 8$, mostrato in figura.




Si chiede di:

1. calcolare il valore medio $m_x$ [1 p],
2. calcolare i coefficienti di Fourier $X_k$ [5 p], e
3. calcolare la potenza $P_x$ [1 p].

*Soluzione.*

1. Si ha
$$m_x = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} x(t)dt + \frac{1}{8}\int_{2}^{4} x(t)dt = \frac{8}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{4}\ .$$

2. Scriviamo il segnale $x(t)$ come una somma $x(t) = y(t) + z(t)$ di due segnali periodici di periodo $T_p = 8$, dove:

- $y(t)$ onda quadra di ampiezza $A = 2$ e duty cycle $d = \frac{1}{2}$,
- $z(t)$ onda triangolare.

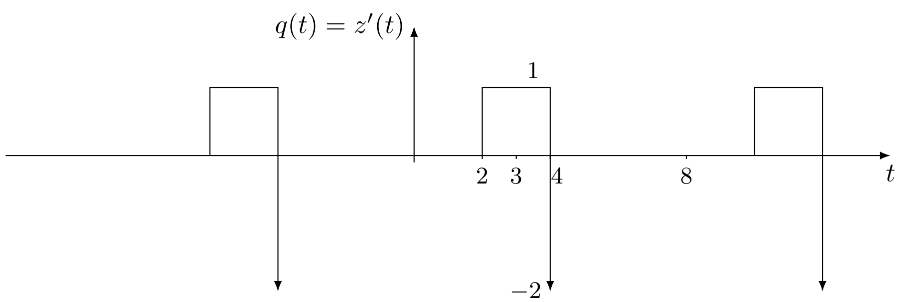
In entrambi i casi abbiamo $\omega_0 = 2\pi/T_P = \frac{\pi}{4}$. Per la regola di linearità i coefficienti della serie di Fourier di $x(t)$ corrisponde alla somma

$$X_k = Y_k + Z_k \ ,$$

in cui per l'onda quadra sappiamo che

$$Y_k = Ad\,\mathrm{sinc}(kd) = \mathrm{sinc}(\tfrac{k}{2}) \ .$$

Per il segnale $z(t)$ risulta invece più conveniente utilizzare la regola di derivazione in quanto $z'(t)$ risulta un'onda quadra di periodo $T_p = 8$ e duty cycle $d' = \frac{1}{4}$, traslata di $t_0 = 3$, più un delta ad area negativa $B = -2$ centrato in $t_1 = 4$ che cattura la discontinuità, come illustrato in figura




Pertanto

$$\begin{aligned} q(t) = z'(t) \quad \Longrightarrow \quad Q_k &= jk\omega_0\, Z_k = j\tfrac{\pi}{4}k\, Z_k \\ &= d'\ \mathrm{sinc}(kd')\ e^{-jk\omega_0 t_0} + \frac{B}{T_p} e^{-jk\omega_0 t_1} \\ &= \tfrac{1}{4}\ \mathrm{sinc}(\tfrac{k}{4})\ e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - \tfrac{1}{4}\,(-1)^k \end{aligned}$$

da cui, per inversione

$$Z_k = \begin{cases} \frac{Q_k}{j\pi k/4} & k \neq 0 \\ m_z & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mathrm{sinc}(\frac{k}{4})\ e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - (-1)^k}{j\pi k} & k \neq 0 \\ \frac{1}{4} & k = 0 \end{cases}$$

Il risultato complessivo risulta quindi

$$X_k = \begin{cases} \mathrm{sinc}(\frac{k}{2}) + \frac{\mathrm{sinc}(\frac{k}{4})\ e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - (-1)^k}{j\pi k} & k \neq 0 \\ \frac{5}{4} & k = 0 \end{cases}$$

3. Il calcolo della potenza è più agevole nel dominio del tempo. Si ha

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} x^2(t)dt + \frac{1}{8}\int_{2}^{4} x^2(t)dt \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 4dt + \frac{1}{8}\int_{2}^{4} (t-2)^2 dt \\
&= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

**Esercizio 3 – [punti 3]**

Sia data la trasformazione descritta dall'equazione

$$y(t) = \int_{t-4}^{t+2} x(u)\cos^3(u-t)\, du\ .$$

Si dica se è: a) lineare, b) tempo invariante, c) BIBO-stabile.

*Soluzione.* Si noti come il sistema si possa scrivere nella forma equivalente

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos^3(u-t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{u-(t-1)}{6}\right)\, du\ ,$$

e pertanto è una convoluzione $y(t) = x * h(t)$ con risposta impulsiva

$$h(t) = \cos^3(-t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{-(t-1)}{6}\right) = \cos^3(t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{t-1}{6}\right)$$

Pertanto

a,b) Il sistema è lineare e tempo invariante;

c) il sistema è BIBO stabile in quanto $h(t)$ limitata nell'itervallo $[-2, 4]$ e pertanto anche assolutamente integrabile.

**SEGNALI E SISTEMI**
**Primo Appello**
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
19 giugno 2023
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Dato il sistema:

$$y(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} x(u)\sin(t-u)du & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dire se è causale, lineare , tempo-invariante, BIBO stabile.

**Soluzione** Si noti che il sistema si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\mathbf{1}(t-u)\sin(t-u)d\tau \right] \cdot \mathbf{1}(t) \\ &= \Big[ x(t) * (\sin(t)\mathbf{1}(t)) \Big] \cdot \mathbf{1}(t) \end{aligned}$$

ovvero una convoluzione con $h(t) = \sin(t)\mathbf{1}(t)$ seguita da una moltiplicazione per un gradino, e pertanto:

1. è causale, poichè $h(t)$ è causale;
2. è lineare poichè il sistema è una convoluzione seguita da una moltiplicazione per un gradino;
3. non è tempo-invariante a causa della moltiplicazione per il gradino;
4. non è nemmeno BIBO stabile prchè il sistema covoluzionale ha $h(t) \notin L_1$ e la moltiplicazione per il gradino non modifica la BIBO stabilità.

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Il segnale

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\tfrac{t}{2})$$

viene campionato con passo di campionamento $T_s = \frac{4}{3}$.

1. Trovare quale segnale viene ricostruito dai campioni $x(nT_s)$ impiegando come filtro interpolatore un filtro passa-basso ideale (= 1 in banda passante) con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{3}{4}\pi$ [5 punti]

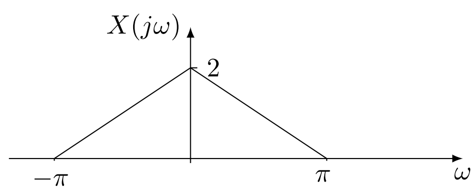
2. Dire quale sarebbe la minima pulsazione di campionamento che consente una ricostruzione esatta di $x(t)$ dai suoi campioni [2 punti]

**Soluzione**

1. Dalle regole della trasformata di Fourier si ha

$$X(j\omega) = 2\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

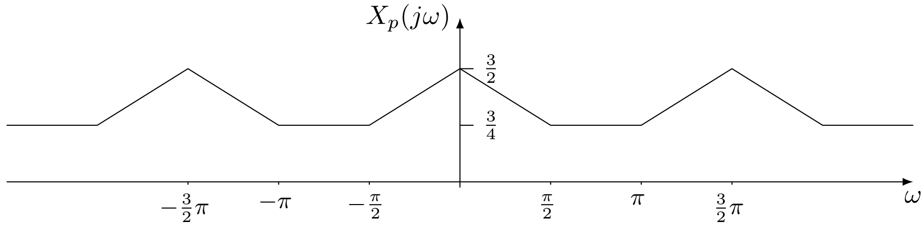
come illustrato in figura

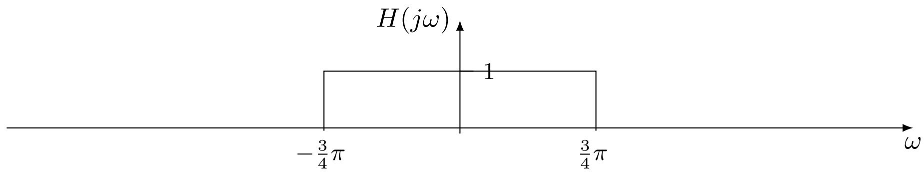


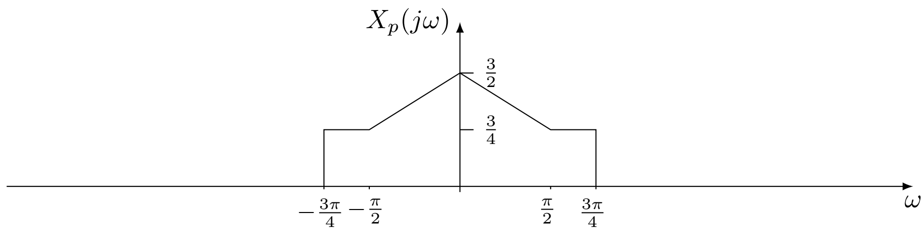

che è una trasformata con estensione $[-\omega_M, \omega_M]$ con $\omega_M = \pi$. Il campionamento e la successiva interpolazione inducono la trasformazione

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\ \underset{\omega_s}{\mathrm{rep}}\ \frac{1}{T_s} X(j\omega) = H(j\omega)\ \underbrace{\underset{\frac{3}{2}\pi}{\mathrm{rep}}\ \tfrac{3}{4} X(j\omega)}_{X_p(j\omega)}$$

con $\omega_s = 2\pi/T_s = \frac{3}{2}\pi < 2\omega_M$, per cui siamo in presenza di aliasing. I segnali $X_p(j\omega)$, $H(j\omega)$ e $Y(j\omega)$ sono mostrati nelle seguenti figure.






Dalla figura si deduce che

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\pi}\right) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{4}\cdot 2\pi}\right) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{4}\cdot 2\pi}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$y(t) = \tfrac{9}{16}\,\mathrm{sinc}\left(\tfrac{3}{4}t\right) + \tfrac{3}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\tfrac{1}{4}t\right)$$

2. Essendo $\omega_M = \pi$ la minima pulsazione di campionamento è $\omega_{smin} = 2\pi$. In termini di periodo di campionamento, ponendo $\omega_M = 2\pi B$, ovvero $B = \frac{1}{2}$, si ha, $T_s < \frac{1}{2B} = 1$.

**Esercizio 3 – [punti 7]**

Sia dato un sistema con ingresso e relativa uscita dati da

$$x(t) = e^{-3t}1(t) \ , \qquad y(t) = \sin(t)1(t)$$

in condizioni iniziali nulle.

1. Identificare la funzione di trasferimento $H(s)$ [3 punti]
2. Scrivere l'equazione differenziale associata [1 punto]
3. Dire se il sistema è BIBO stabile, spiegandone la ragione, e proporre un ingresso limitato che generi un'uscita non limitata [3 punti]

**Soluzione**

1. Si ha

$$X(s) = \frac{1}{s+3} \ , \qquad Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

e pertanto

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^2+1}$$

con antitrasformata

$$h(t) = \cos(t)1(t) + 3\sin(t)1(t)$$

2. Per ispezione si ha

$$y''(t) + y(t) = x'(t) + 3x(t) \ .$$

3. Il sistema ovviamente non è BIBO stabile in quanto i suoi poli $\pm j$ stanno sull'asse immaginario. Serve eccitare il sistema con un polo al limite della stabilitá, ad esempio con

$$x(t) = e^{jt}1(t) \ , \qquad X(s) = \frac{1}{s-j}$$

si ottiene

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s-j)^2(s+j)} = \frac{A}{(s-j)^2} + \frac{B}{s-j} + \frac{C}{s+j}$$

con

$$A = \frac{s+3}{s+j}\Big|_{s=j} = \frac{1-3j}{2}$$

$$B = \frac{d}{ds}\Big(\frac{s+3}{s+j}\Big)\Big|_{s=j} = \frac{3-j}{4}$$

$$C = \frac{s+3}{(s-j)^2}\Big|_{s=-j} = \frac{j-3}{4} = -B$$

ovvero

$$y(t) = Ate^{jt}1(t) + Be^{jt}1(t) - Be^{-jt}1(t)$$

in cui il primo termine è il contributo non limitato.

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Dato il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-20}^{20} j^k \cdot e^{jk\frac{\pi}{20}t}$$

dire se è reale e pari. Calcolarne la potenza.

**Soluzione** $x(t)$ è scritto come una serie di Fourier con coefficienti

$$a_k = \begin{cases} j^k & |k| \leq 20 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per cui:

1. $x(t)$ è reale e pari se e solo gli $a_k$ sono reali e pari. In questo caso gli $a_k$ non sono reali pari, quindi x(t) non è reale pari. Gli $a_k$ hanno peró simmetria Hermitiana, per cui si può anche concludere che il segnale è reale (ma non pari).

2. $x(t)$ è periodico, per cui la sua potenza è uguale alle potenza media sul periodo che, per il teorema di Parseval, è

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-20}^{+20} |j|^{2k} = \sum_{k=-20}^{+20} 1 = 41$$

**Esercizio 5 – [punti 3]**

Dati segnali $x(n)$, $y(n)$ e $z(n) = x(n) * y(n)$, dire se le seguenti affermazioni sono vere e giustificare le risposte:

1. $x(n+1) * y(n+1) = z(n+1)$
2. $x(n-7) * y(n+7) = z(n)$
3. $-x(n) * [-y(n)] = -z(n)$

**Soluzione**

1. Si può pensare a $z(n)$ come l'uscita di un sistema LTI con ingresso $x(n)$ e risposta impulsiva $y(n)$. Se l'ingresso trasla in $n_0 = -1$, anche l'uscita trasla in $n_0 = -1$, per cui si ha $x(n+1)*y(n) = z(n+1)$. Pensando poi al sistema con risposta impulsiva $x(n+1)$ ed ingresso $y(n)$ (uscita $z(n+1)$), se l'ingresso trasla in $n_0 = -1$ ($y(n+1)$), l'uscita trasla concordemente: $z(n+1+1) = z(n+2)$. Quindi l'affermazione è FALSA.

2. Con un ragionamento analogo a quello del punto precedente si deduce che l'affermazione è VERA, infatti $x(n-7) * y(n) = z(n-7)$, da cui $x(n-7) * y(n+7) = z(n-7+7) = z(n)$.

3. Sempre interpretando $z(n)$ come l'uscita di un sistema LTI con ingresso $x(n)$ e risposta impulsiva $y(n)$, per la linearità, se l'ingresso viene moltiplicato per la costante $-1$, l'uscita viene anche moltiplicata per la stessa costante, per cui $-x(n) * [y(n)] = -z(n)$. Da cui si ha $-x(n) * [-y(n)] = z(n)$, per cui l'affermazione è FALSA.

**Esercizio 6 – [punti 3]**

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento `T`, siano contenuti nel vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```

COGNOME:.........................................
NOME:...............................................
MATRICOLA:.....................................

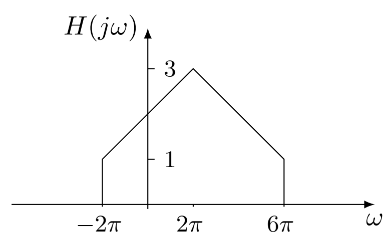
**SEGNALI E SISTEMI**
**Secondo Appello**
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
13 LUGLIO 2023
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Sia dato il segnale

$$x(t) = \cos(\pi t) + 2e^{-j8\pi t}$$

in ingresso ad un filtro con risposta in pulsazione $H(j\omega)$ illustrata in figura.




1. Dire se il filtro in questione è reale [1 punto]
2. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ [3 punti]
3. Calcolare l'uscita $y(t)$ del filtro [3 punti]

**Soluzione**

1. Il filtro non è reale, in quanto $H(j\omega)$ non ha simmetria hermitiana.
2. Da
$$H(j\omega) = \text{rect}((\omega - 2\pi)/(8\pi)) + 2\text{triangle}((\omega - 2\pi)/(4\pi))$$
si ottiene
$$h(t) = (4\text{sinc}(4t) + 4\text{sinc}^2(2t))e^{j2\pi t}$$
3. Il filtro è attivo tra $-2\pi$ e $6\pi$, pertanto del segnale
$$x(t) = \tfrac{1}{2}e^{j\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\pi t} + 2e^{-j8\pi t}$$
modifica i primi due contributi ed elimina il terzo, ovvero
$$y(t) = \tfrac{5}{4}e^{j\pi t} + \tfrac{3}{4}e^{-j\pi t}$$

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Dato il sistema LTI a tempo discreto, con risposta impulsiva:

$$h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1(n) - 4a^n \cdot 1(n)$$

con $a \in R$

1. Trovare l'equazione alle differenze associata al sistema [2 punti].
2. Dire per quali valore di $a$ il sistema è BIBO stabile e giustificare la risposta [2 punti]
3. trovare l'uscita forzata del sistema quando $x(n) = 1(n)$, nel caso $a = -2$ [3 punti].

**Soluzione**

1. Si calcola prima la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{4}{1-az^{-1}} = \frac{1-az^{-1}-4+z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-az^{-1})} \\ &= \frac{-3+(1-a)z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-az^{-1})} = \frac{-3+(1-a)z^{-1}}{1-(a+\frac{1}{4})z^{-1}+\frac{a}{4}z^{-2}} \end{aligned}$$

   da cui per ispezione:

$$y(n) - (a+\tfrac{1}{4})y(n-1) + \tfrac{a}{4}y(n-2) = -3x(n) + (1-a)x(n-1)$$

2. I poli della funzione di trasferimento sono in $z = \frac{1}{4}$ (polo stabile) e $z = a$, perciò il sisitema è BIBO stabile per $|a| < 1$.

3. Abbiamo

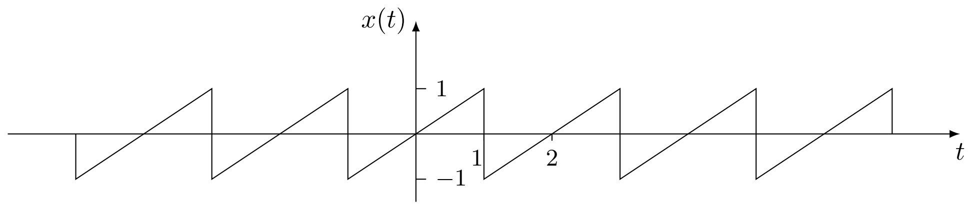
$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) \\ &= \frac{-3+3z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+2z^{-1})} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{-3}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+2z^{-1})} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{8}{3}\frac{1}{1+2z^{-1}} \end{aligned}$$

   da cui

$$y(n) = -\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n 1(n) - \tfrac{8}{3}(-2)^n 1(n)$$

**Esercizio 3 – [punti 7]**

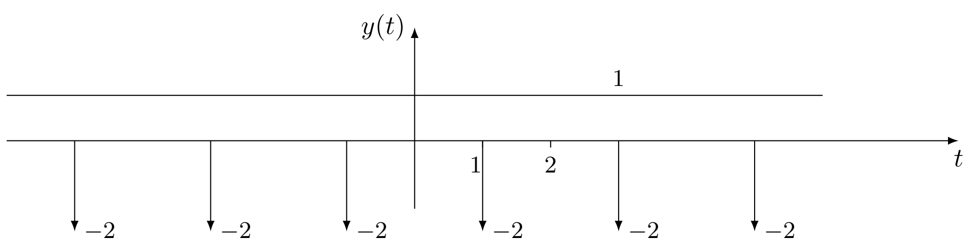
Sia dato il segnale periodico illustrato in figura.




1. Calcolare i coefficienti $X_k$ della serie di Fourier [4 punti].
2. Trovare i coefficienti del segnale $z(t) = x(t)e^{j3\pi t}$[2 punti].
3. Dire di che simmetria godono i segnali $x(t)$ e $X_k$ [1 punto].

**Soluzione**

1. Conviene procedere per derivazione, in cui il segnale derivata $y(t) = x'(t) = 1 - 2\text{comb}_2(t-1)$ è illustrato in figura,




i cui coefficienti sono

$$Y_k = \delta(k) - e^{-jk\omega_0}\ , \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \pi$$
$$= \begin{cases} 0 & k = 0 \\ -1 & k \text{ pari} \neq 0 \\ 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

e pertanto

$$X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{jk\omega_0} & k \neq 0 \\ m_x = 0 & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{j}{k\pi} & k \text{ pari} \neq 0 \\ \frac{-j}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

2. 
$$Z_k = X_{k-3}$$

3. $x(t)$ è reale dispari, pertanto $X_k$ è puramente immaginario e dispari.

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione

$$y(n) = x(n+2) + \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)\cos(k)$$

1. dire se è lineare e tempo-invariante [2 punti] e
2. trovare la risposta impulsiva [1 punto].

**Soluzione**

1. Il sistema è lineare, mentre non è tempo invariante, infatti

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n+2) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cos(k)1(n+1-k) \\ &= x(n+2) + [x(n)\cos(n)] * 1(n+1) \end{aligned}$$

in cui la moltiplicazione per $\cos(n)$ implica la tempo varianza.

2. Dal risultato appena trovato, per la proprietà rivelatrice del delta, si ha

$$\begin{aligned} h(n) &= \delta(n+2) + [\delta(n)\cos(n)] * 1(n+1) \\ &= \delta(n+2) + [\delta(n)] * 1(n+1) \\ &= \delta(n+2) + 1(n+1) \\ &= 1(n+2) \end{aligned}$$

**Esercizio 5 – [punti 3]**

Sia dato il segnale $x(t) = \text{sinc}(t/5)e^{j\frac{\pi}{5}t}$. Dopo aver identificato la banda del segnale, si chiede di proporre uno schema di campionamento/interpolazione in banda base in grado di ricostruire esattamente il segnale dai propri campioni, specificando il passo di campionamento minimo $T$ che garantisca la ricostruibilità.

**Soluzione** La trasformata di Fourier del segnale è

$$X(j\omega) = 5\,\text{rect}(\tfrac{5}{2\pi}(\omega - \tfrac{\pi}{5}))$$

con estensione in pulsazione $[0, \omega_c]$, $\omega_c = \frac{2\pi}{5}$. Pertanto $\omega_c = 2\pi B$ con $B = \frac{1}{5}$ ed il segnale é perfettamente ricostruibile dai propri campioni scegliendo un passo di campionamento $T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{5}{2}$. Lo schema di ricostruzione è

$$x(t) = \sum_k x(kT)\text{sinc}((t - kT)/T)\ .$$

**Esercizio 6 – [punti 3]**

Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per calcolare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

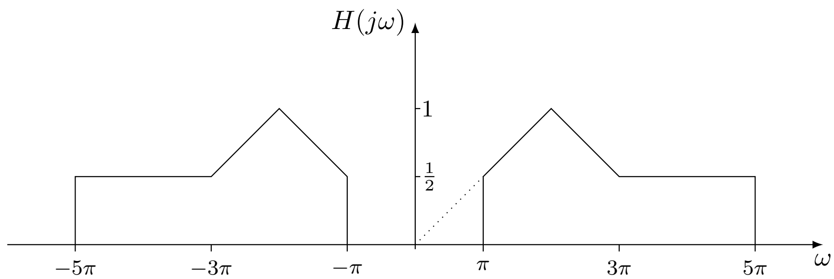
```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y); % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```

COGNOME:.........................................
NOME:...............................................
MATRICOLA:......................................

**SEGNALI E SISTEMI**
**Terzo Appello**
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
5 SETTEMBRE 2023
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Si consideri un sistema LTI con risposta in frequenza $H(j\omega)$ illustrata in figura.




1. Dire se il filtro in questione è reale [1 punto]
2. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ [5 punti]
3. Calcolare l'area $A_h$ della risposta impulsiva [1 punto].

**Soluzione**

1. Il filtro è reale e pari, in quanto $H(j\omega)$ ha simmetria reale e pari.
2. Da
$$\begin{aligned}H(j\omega) &= \tfrac{1}{2}\text{rect}\left(\tfrac{\omega-3\pi}{4\pi}\right) + \tfrac{1}{2}\text{rect}\left(\tfrac{\omega+3\pi}{4\pi}\right)\\ &\quad + \tfrac{1}{2}\text{triang}\left(\tfrac{\omega-2\pi}{\pi}\right) + \tfrac{1}{2}\text{triang}\left(\tfrac{\omega+2\pi}{\pi}\right)\end{aligned}$$
e ricordando le coppie segnale-trasformata
$$\begin{aligned} x(t)\cos(\omega_0 t) \quad &\Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}X(j\omega-\omega_0) + \tfrac{1}{2}X(j\omega+\omega_0)\\ 2\text{sinc}(2t) \quad &\Longrightarrow \quad \text{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi})\\ \tfrac{1}{2}\text{sinc}^2(\tfrac{t}{2}) \quad &\Longrightarrow \quad \text{triang}(\tfrac{\omega}{\pi})\end{aligned}$$
si ottiene
$$h(t) = 2\,\text{sinc}(2t)\cos(3\pi t) + \tfrac{1}{2}\text{sinc}^2(\tfrac{t}{2})\cos(2\pi t)$$
3. Per la regola dell'area si ha $A_h = H(j0) = 0$.

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Si consideri un sistema continuo
definito da equazioni differenziali la cui funzione di trasferimento sia

$$H(s) = \frac{1-s}{(s+3)(s+2)} \; .$$

Si chiede di:

1. Scrivere l'equazione differenziale associata al sistema [1 punto]

2. Dire se il sistema è BIBO stabile [1 punto]

3. Identificare l'ingresso al sistema se la risposta forzata è [3 punti]

$$Y_f(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+2)}$$

4. Identificare la risposta impulsiva $h(t)$ associata al sistema [2 punti]

**Soluzione**

1. Avendo
$$H(s) = \frac{1-s}{s^2+5s+6}$$
l'equazione differenziale risulta $x(t) - x'(t) = 6y(t) + 5y'(t) + y''(t)$.

2. I poli del sistema sono $p_1 = -2$ e $p_2 = -3$, entrambi con parte reale negativa, e pertanto il sistema è BIBO stabile.

3. Si ha
$$X(s) = \frac{Y_f(s)}{H(s)} = \frac{1+s}{1-s} = -1 - \frac{2}{s-1}$$
e quindi
$$x(t) = -\delta(t) - 2e^t 1(t)$$

4. Tramite scomposizione ai fattori semplici otteniamo
$$H(s) = \frac{1-s}{(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \; , \qquad A = 3, B = -4$$
e pertanto
$$h(t) = 3e^{-2t}1(t) - 4e^{-3t}1(t)$$

**Esercizio 3 – [punti 7]**

Dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)\cos(k)$$

1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante, BIBO stabile e motivare le risposte [5 punti].

2. Trovare la risposta impulsiva [2 punti].

**Soluzione**

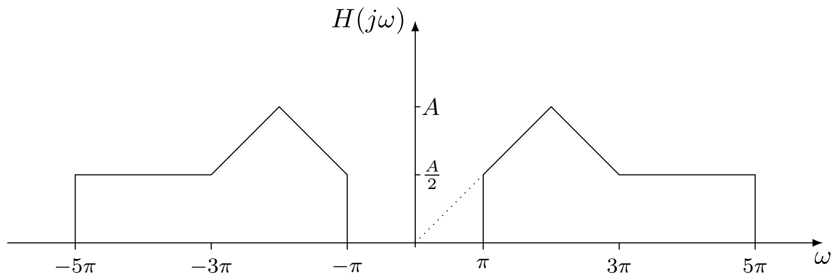
1. $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cos(k)\mathbf{1}(n+1-k) = [x(n)\cos(n)] * \mathbf{1}(n+1)$$

   Per cui il sistema non è statico, è limeare ma non è LTI a causa della moltiplicazione per $\cos(n)$, per cui non è tempo invariante, non è causale poichè utilizza l'informazione $x(n+1)$, non è BIBO stabile poichè con ingresso $x(n) = \cos(n)$ si ha $x(n)\cos(n) = \cos^2(n)$ e pertanto stiamo sommando termini tutti positivi che fanno divergere il segnale.

2. Si ha $h(n) = [\delta(n)\cos(n)] * \mathbf{1}(n+1) = \delta(n) * \mathbf{1}(n+1) = \mathbf{1}(n+1)$.

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Si consideri un sistema LTI con risposta in frequenza $H(j\omega)$ illustrata in figura.




Calcolare l'uscita del sistema con ingresso $x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - 4\sin(3\pi t) + 2\cos(4\pi t)$

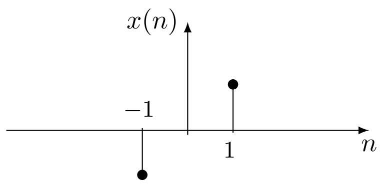
**Soluzione** Il filtro è reale e pari, in quanto $H(j\omega)$ ha simmetria reale e pari, a valori reali positivi e fase nulla. Pertanto l'uscita è

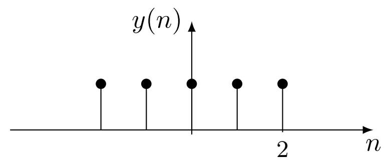
$$\begin{aligned} y(t) &= 2H(j0) + H(j2\pi)\cos(2\pi t) - 4H(j3\pi)\sin(3\pi t) + 2H(j4\pi)\cos(4\pi t) \\ &= A\cos(2\pi t) - 2A\sin(3\pi t) + A\cos(4\pi t) \end{aligned}$$

**Esercizio 5 – [punti 3]**

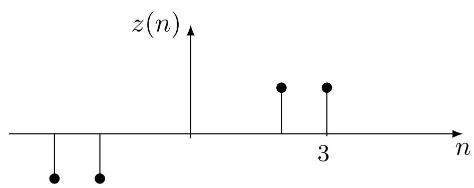
Dati i segnali a tempo discreto $x(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1)$ e $y(n) = \mathrm{rect}(n/5)$, dopo aver disegnato i segnali, si chiede di calcolare e disegnare la convoluzione $z(n) = x * y(n)$

**Soluzione** Per i segnali abbiamo




La convoluzione quindi risulta $z(n) = y(n-1) - y(n+1)$, ovvero



**Esercizio 6 – [punti 3]**

Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(j\omega)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(j\omega)$ in corrispondenza delle pulsazioni $\omega$=$\omega_0$`*(-N/2:N/2-1)` in cui $\omega_0$ sia dato e pertanto sia noto il passo di campionamento nel tempo `T = 2*pi/(N*`$\omega_0$`)`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
x = ifft(fftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```

COGNOME:.........................................
NOME:...............................................
MATRICOLA:.....................................

**SEGNALI E SISTEMI**
**Quarto Appello**
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
9 FEBBRAIO 2024
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Si consideri il sistema LTI, causale, a tempo continuo, descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$y'''(t) + y''(t) + 25y'(t) + 25y(t) = x''(t) - 4x(t)$$

1. Trovare la funzione di trasferimento [1 punto]
2. Dire se il sistema è BIBO stabile, giustificando la risposta [2 punto]
3. Trovare la risposta impulsiva [2 punti]
4. Dire se l'ingresso $x(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$ (con $u(t)$ gradino unitario) genera un'uscita forzata limitata. Giustificare la risposta [2 punti]

**Soluzione**

1. $$H(s) = \frac{s^2 - 4}{s^3 + s^2 + 25s + 25} = \frac{(s+2)(s-2)}{(s^2+25)(s+1)}$$
2. $H(s)$ è strettamente propria; i poli sono $s_1 = -1$ e $s_{2,3} = \pm j5$. Poichè non tutti i poli hanno parte reale negativa, il sistema non è BIBO stabile.
3. Per calcolare l'antitrasformata di $H(s)$ si procede all'estrazione dei poli
$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 25}$$
$$A = lim_{s\to -1}(s+1)H(s) = -\frac{3}{26}$$
il secondo fratto si trova per differenza tra $H(s)$ e il fratto appena estratto
$$\frac{Bs + C}{s^2 + 25} = \frac{29}{26} \cdot \frac{s}{s^2 + 5^2} - \frac{29}{130} \cdot \frac{5}{s^2 + 5^2}$$
da cui, antitrasformando
$$h(t) = \left[-\frac{3}{26}e^{-t} + \frac{29}{26}\cos(5t) - \frac{29}{130}\sin(5t)\right] \cdot u(t)$$

4. l'ingresso $x(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$ ha trasformata di Laplace

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 25}$$

per cui la risposta forzata risulta

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{s(s+2)(s-2)}{(s^2+25)^2(s+1)}$$

in cui i poli instabili $\pm j5$ hanno molteplicità due, generando quindi un'uscita divergente.

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Dato il segnale

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2}) + 5\,\cos(\omega_0 t)$$

1. Trovare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ [1 punto].

2. Il segnale viene campionato con passo $T_s = 1s$. Dire per quali valori di $\omega_0$ il segnale può essere ricostruito esattamente dai campioni mediante filtro interpolatore ideale, ovvero con guadagno 1 in banda passante e pulsazione di taglio $\omega_s/2 = \pi$ [3 punti].

3. Dato $\omega_0 = \frac{3}{2}\pi$, dire che segnale viene ricosruito dai campioni mediante filtro interpolatore ideale [3 punti].

**Soluzione**

1. $$X(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{\pi}) + 5\pi\,\delta(\omega - \omega_0) + 5\pi\,\delta(\omega + \omega_0)$$

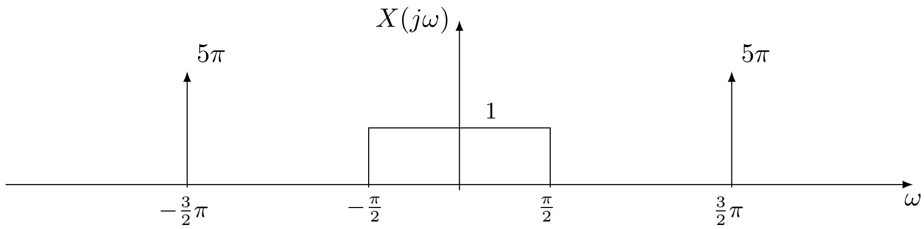
   in cui il rect ha estensione $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed i delta sono posizionati a $\pm\omega_0$.

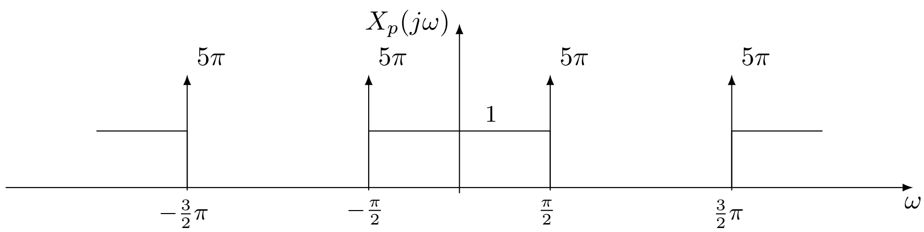
2. La massima pulsazione è

   $$\omega_M = 2\pi B = \max(\tfrac{\pi}{2}, \omega_0)$$

   Secondo il teorema di Shannon, per poter ricostruire esattamente il segnale dai campioni, è necessario campionare con pulsazione $\omega_s = 2\pi > 2\omega_M$. Perciò deve essere $\omega_M < \pi$. La condizione è verificata se $\omega_0 < \pi$. Si ottiene lo stesso risultato anche usando usando la regola alternativa $T_s = 1 < \frac{1}{2B}$, $2B = \max(\frac{\pi}{2}, \omega_0)/\pi$.

3. Essendo $\omega_0 > \pi$ siamo in presenza di aliasing. $X_p(j\omega) = \mathrm{rep}_{2\pi}\,X(j\omega)$ è mostrato in figura.




Quindi all'uscita del filtro interpolatore ideale si avrà

$$X_r(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{\pi}) + 5\pi\delta(\omega - \tfrac{\pi}{2}) + 5\pi\delta(\omega + \tfrac{\pi}{2})$$

e pertanto il segnale riscostruito è

$$x_r(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2}) + 5\,\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

**Esercizio 3 – [punti 7]**

Dato il sistema discreto descritto dall'equazione

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)\,3^{k-n} - 3x(n+1)$$

si dica se è: istantaneo (statico), causale, lineare, tempo invariante, BIBO stabile, giustificando le risposte [1 punto per ogni richiesta]. Si calcoli inoltre l'uscita se in ingresso viene posto il gradino $x(n) = u(n) = 1$, $n \geq 0$ e 0 altrove [2 punti].

**Soluzione** Va inizialmente notato che il sistema è un sistema convoluzionale che i può scrivere nella forma

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\,3^{k-n} = x * h(n)$$

con $h(n) = u(n)\,3^{-n}$, assolutamente sommabile. Quindi, il sistema: non è istantaneo, è causale, è lineare, è tempo invariante, è BIBO stabile. L'uscita, nel caso di gradino unitario in ingresso, risulta $y(n) = 0$ per $n < 0$, mentre per $n \geq 0$ si ha

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} 3^{k-n} = \sum_{m=0}^{n} 3^{-m} = \frac{1 - 3^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}} = \tfrac{3}{2}(1 - 3^{-(n+1)})$$

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = e^{j\frac{1}{4}n} - je^{-j\frac{4}{3}n} + \tfrac{3}{5}\sin(\tfrac{\pi}{2}n) - 2$$

1. Dire se è periodico e giustificare la risposta [1 punto].
2. Il segnale è posto in ingresso ad un filtro con risposta in frequenza $H(e^{j\theta}) = \cos(\theta)$. Trovare l'uscita del filtro [2 punti].

**Soluzione**

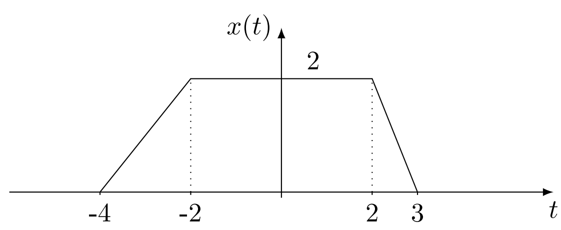
1. Le fasi $\frac{1}{4}$ e $-\frac{4}{3}$ non sono in rapporto razionale con $2\pi$, perciò il segnale non è periodico.
2. Per la proprietà di autofunzione dell'esponenziale complesso, l'uscita del filtro è

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\tfrac{1}{4})\, e^{j\frac{1}{4}n} - \cos(\tfrac{-4}{3})\, je^{-j\frac{4}{3}n} + \tfrac{3}{5}\cos(\tfrac{\pi}{2})\sin(\tfrac{\pi}{2}n) - 2\cos(0) \\ &= \cos(\tfrac{1}{4})\, e^{j\frac{1}{4}n} - \cos(\tfrac{4}{3})\, je^{-j\frac{4}{3}n} - 2 \end{aligned}$$

poichè $\cos(\pi/2) = 0$ e $\cos(0) = 1$

**Esercizio 5 – [punti 3]**

Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale



**Soluzione** Valutando la derivata del segnale

$$y(t) = x'(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t+3)) - 2\mathrm{rect}(t - \tfrac{5}{2})$$

si ottiene

$$Y(j\omega) = 2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi})e^{j3\omega} - 2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{2\pi})e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

da cui

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} = \frac{2\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})e^{j3\omega} - 2\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{j\omega}$$

senza impulsi aggiuntivi in quanto il valor medio del $y(t)$ segnale è nullo.

**Esercizio 6 – [punti 3]**

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento `T`, siano contenuti nel vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```