Esercizio N. 1

[7 punti] Si consideri il segnale periodico $x(t)$ di periodo $T_p = 5$ definito come

$$x(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{1}{4}t) \cdot [1 + \mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}t - 1)] \,, \qquad t \in \mathcal{I}$$

nel periodo $\mathcal{I} = [-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p]$.

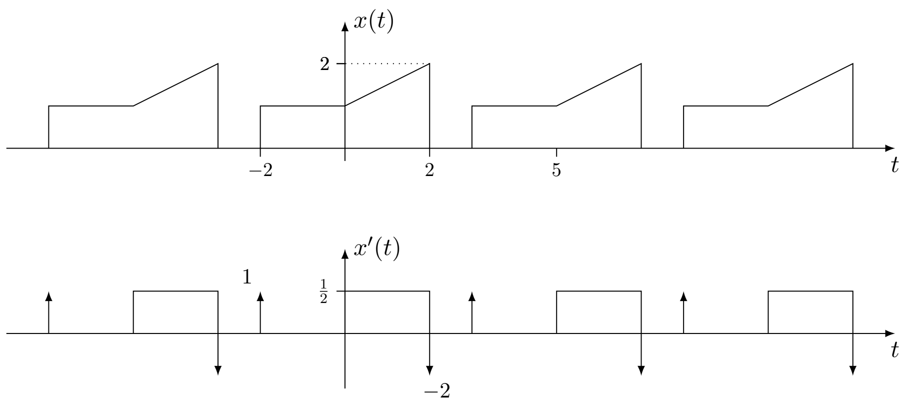
a. Si disegnino il segnale e la sua derivata generalizzata.

b. Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier del segnale $x(t)$.

c. Sia $x(t)$ l'ingresso di un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = 10 - 10\,\mathrm{rect}(5f)$. Si calcoli la corrispondente uscita $y(t)$.

Soluzione

a. I segnali sono illustrati in figura



Nel periodo $\mathcal{I}$ la derivata risulta

$$z(t) = x'(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t-2) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-1)) \,.$$

b. I coefficienti della serie di Fourier del segnale $z(t)$ sono

$$Z_k = \frac{Z(kF)}{T_p} = \tfrac{1}{5}Z(kF) \,, \qquad Z(kF) = e^{i2\pi k 2F} - 2e^{-i2\pi k2F} + \mathrm{sinc}(k2F)e^{-i2\pi kF}$$
$$= e^{i\frac{4}{5}\pi k} - 2e^{-i\frac{4}{5}\pi k} + \mathrm{sinc}(\tfrac{2}{5}k)e^{-i\frac{2}{5}\pi k}$$

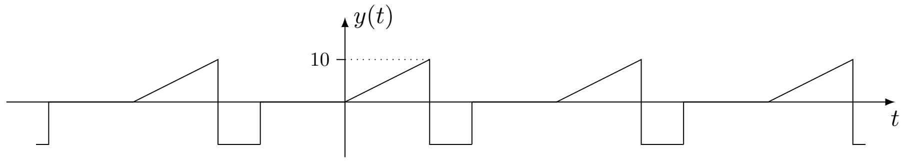
in cui si è sfruttata l'uguaglianza $F = \frac{1}{5}$. Pertanto, dalla regola di derivazione per il segnale $x(t)$ si ha

$$X_k = \tfrac{1}{5}X(kF) \,, \qquad X(kF) = \begin{cases} \dfrac{e^{i\frac{4}{5}\pi k} - 2e^{-i\frac{4}{5}\pi k} + \mathrm{sinc}(\frac{2}{5}k)e^{-i\frac{2}{5}\pi k}}{i\frac{2}{5}\pi k} \,, & k \neq 0 \\ 5 \,, & k = 0 \end{cases}$$

in cui il valore $X(0) = 5$ è l'area di $x(t)$ in un periodo, ricavato per ispezione della figura.

c. Il filtro è un passa-alto con frequenza di taglio $f_0 = \frac{1}{10}$, per cui, essendo la prima armonica centrata alla frequenza $F = \frac{1}{5}$, di fatto il filtro taglia solo la componente in banda base, mentre tutte le altre componenti vengono scalate per un fattore 10. Pertanto si ha semplicemente

$$y(t) = 10\,(x(t) - X_1) = 10\,x(t) - 10\ .$$



Esercizio N. 2

[7 punti] Siano dati i segnali continui

$$x(t) = 1(t-2) + \mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-3)) \; , \qquad y(t) = 1(t)\cos(2\pi t)$$

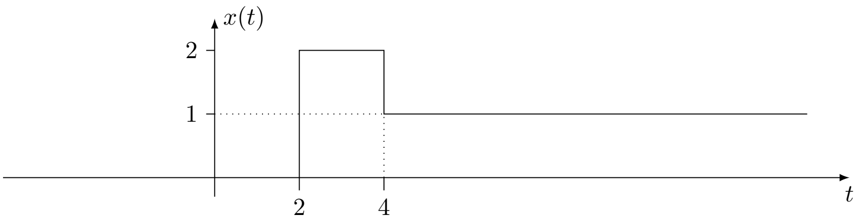
a. Disegnare i segnali e calcolarne potenza ed energia.

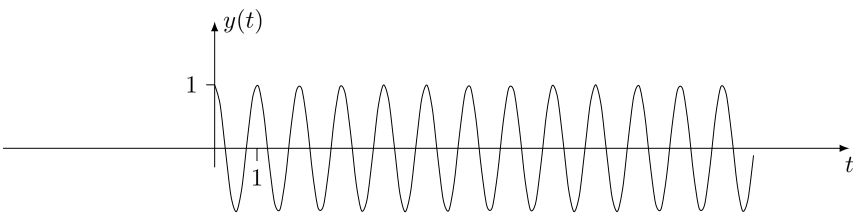
b. Calcolare e disegnare la convoluzione $z(t) = x * y(t)$

c. Come cambia il risultato della convoluzione se sostituiamo $y(t) \to y'(t) = 5 \cdot 1(t+2)\cos(2\pi t)$?

Soluzione

a. I segnali sono illustrati in figura.





Essendo entrambi i segnali unilateri, la potenza risulta semplicemente dimezzata rispetto a quella di segnali equivalenti estesi a tutto l'asse reale, ovvero

$$P_x = \tfrac{1}{2} \; , \qquad P_y = \tfrac{1}{4} \; ,$$

dove per il segnale $x(t)$ abbiamo considerato il solo contributo $1(t-2)$, in quanto il rettangolo avendo estensione limitata dà contributo nullo alla potenza.

b. Per la convoluzione

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)x(t-u)\,du = \int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi u)x_-(u-t)\,du$$

possiamo identificare tre regioni. Per $t \leq 2$ abbiamo semplicemente $z(t) = 0$. Per $2 < t < 4$ otteniamo

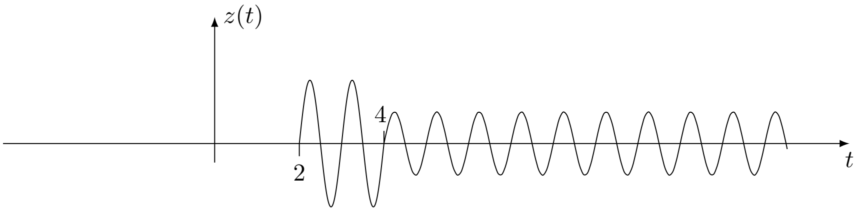
$$z(t) = \int_0^{t-2} 2\cos(2\pi u)\,du = \left.\frac{\sin(2\pi u)}{\pi}\right|_0^{t-2} = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi} \; .$$

Infine per $t \geq 4$ abbiamo

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^{t-4} \cos(2\pi u)\,du + \int_{t-4}^{t-2} 2\cos(2\pi u)\,du \\ &= \left.\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}\right|_0^{t-4} + \left.\frac{\sin(2\pi u)}{\pi}\right|_{t-4}^{t-2} = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \end{aligned}$$

ovvero

$$z(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < 2 \\ \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \ , & 2 < t < 4 \\ \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \ , & t \geq 4 \ . \end{cases}$$



c. Poiché $y'(t) = 5y(t+2)$ per le proprietà della convoluzione si ha semplicemente

$$z'(t) = 5z(t+2) \ .$$

Domanda N. 1

[3 punti] Disegnare l'andamento dei segnali

$$x(t) = \mathrm{triang}(\tfrac{t}{2} - 2) \ , \qquad y(t) = x(5 - t/4) \ .$$

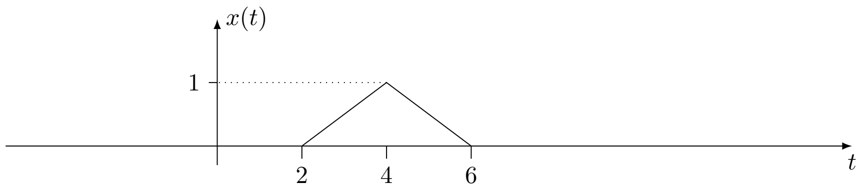
Soluzione Valutiamo inizialmente le espressioni dei segnali. Per il segnale $x(t)$ si ha

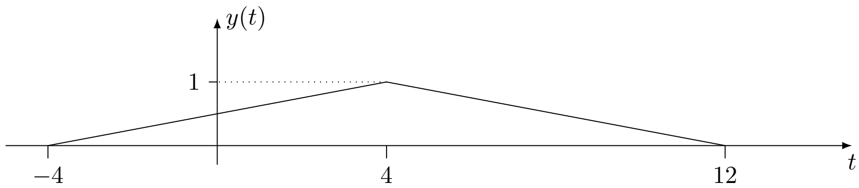
$$x(t) = \mathrm{triang}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

mentre per il segnale $y(t)$ otteniamo

$$y(t) = x(5 - t/4) = \mathrm{triang}\left(\frac{5 - t/4 - 4}{2}\right) = \mathrm{triang}\left(\frac{4-t}{8}\right) = \mathrm{triang}\left(\frac{t-4}{8}\right)$$

in cui nell'ultimo passaggio si è sfruttata la simmetria pari del triangolo. La loro rappresentazione grafica è riportata in figura.





Domanda N. 2

[3 punti] Siano dati due sistemi LTI discreti caratterizzati dalle risposte impulsive

$$h_1(n) = \mathbf{1}(n-5)\cos(\tfrac{\pi}{4}n) \ , \qquad h_2(n) = \mathbf{1}(n+4)(\tfrac{1}{2})^n \ ,$$

dove $\mathbf{1}(n)$ indica il gradino discreto. Si dica se i sistemi sono causali e/o BIBO stabili.

Si dica inoltre se il sistema discreto ottenuto dalla cascata di h_1 e h_2 sia causale.

Soluzione Un sistema discreto è causale se la sua risposta impulsiva è identicamente nulla per $n < 0$ (ovvero è causale). Ora, si vede semplicemente che h_1 è causale mentre h_2 non è causale. Il sistema cascata, identificato dalla risposta impulsiva $h = h_1 * h_2$ è ovviamente causale in quanto, per la regola sull'estensione della convoluzione $e[h] \in [5-4, \infty) = [1, \infty)$.

La BIBO stabilità, invece, dipende dalla sommabilità del valore assoluto della risposta impulsiva, e per il primo sistema si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = \sum_{n=5}^{\infty} |\cos(\tfrac{\pi}{4}n)| = \infty$$

in quanto il coseno non si spegne. Il sistema h_1 pertanto non è BIBO stabile. Per il secondo sistema invece

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2(n)| = \sum_{n=-4}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n < \infty$$

in quanto le potenze di $\frac{1}{2}$ sono sicuramente sommabili (non serve calcolare il valore esatto). Pertanto il sistema h_2 è BIBO stabile.

Domanda N. 3

[3 punti] Si consideri il segnale complesso

$$s(t) = e^{(i2\pi-1)t} 1(t) \ .$$

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per plottare parte reale ed immaginaria di $s(t)$. Si chiede di giustificare esplicitamente la scelta fatta per il passo di campionamento `T` e per gli istanti temporali `t` su cui campionare il segnale.

Soluzione Notando che il segnale è composto da un esponenziale complesso a fase lineare $e^{i2\pi t}$ di periodo $T_p = 1$, risulta conveniente scegliere un passo di campionamento piccolo, ad esempio $T = \frac{1}{50}$, per avere 50 campioni per periodo e pertanto ben rappresentare le componenti sinusoidali. La componente di attenuazione è invece e^{-t} che possiamo considerare attenuata a $t = 10$. Pertanto lo script potrebbe essere:

```
T = 1/50; % passo di campionamento
t = -1:T:10; % finestra temporale in cui catturare il segnale

s = exp((2i*pi-1)*t).*(t>=0); % campioni del segnale
plot(t,real(s),t,imag(s)); % plot di parte reale e parte immaginaria
```

Domanda N. 4

[3 punti] Il segnale

$$x(t) = 2 + 3\cos(\tfrac{4}{5}\pi t + \tfrac{\pi}{4}) - 5ie^{i\left(\frac{14}{3}\pi t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

sia posto in ingresso ad un filtro *passa-alto* ideale con frequenza di cutoff $f_0 = 2\,\text{Hz}$. Determinare l'uscita del sistema.

Soluzione Il filtro passa-alto ideale mantiene solo le frequenze maggiori (in valore assoluto) di $f_0 = 2$. Poché il segnale $x(t)$ è costituito da tre contributi, il primo a frequenza nulla $f_1 = 0 < 2$, il secondo a frequenza $f_2 = \frac{2}{5} < 2$ ed il terzo a frequenza $f_3 = \frac{7}{3} > 2$, l'uscita del sistema è semplicemente

$$y(t) = -5ie^{i\left(\frac{14}{3}\pi t - \frac{\pi}{4}\right)} \; .$$

Domanda N. 5

[3 punti] Dato un sistema con relazione ingresso–uscita

$$y(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t |x(u) + i|\, e^{-u}\, du\,, & t > 0 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

si dica se è: istantaneo, lineare, tempo invariante, BIBO stabile.

Soluzione Il sistema:

1. non è istantaneo in quanto l'uscita al tempo t dipende dall'ingresso nell'intervallo $[0, t]$ che comprende il presente t ma pure il passato $[0, t)$;
2. non è lineare a causa della presenza del modulo $|\cdot|$ che è un operatore non lineare;
3. non è tempo invariante in quanto l'ingresso $x(t - t_0)$ restituisce

$$\int_0^t |x(u - t_0) + i|\, e^{-u}\, du = \int_{-t_0}^{t-t_0} |x(v) + i|\, e^{-(v+t_0)}\, dv \neq y(t - t_0)\ ;$$

4. è BIBO stabile in quanto per $|x(t)| \leq L_x$ e $t > 0$ otteniamo

$$|y(t)| \leq (L_x + 1) \int_0^t e^{-u}\, du = (L_x + 1)\,(1 - e^{-t}) < \infty\ .$$

Domanda N. 6

[3 punti] Il segnale

$$x(t) = 5\cos(10\pi t + \tfrac{\pi}{6})$$

sia fornito in ingresso ad un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = \mathrm{sinc}(f/10)e^{i2\pi f}$. Si chiede di valutare il segnale in uscita $y(t)$ e di dire se il filtraggio ha distorto il segnale oppure no.

Soluzione La risposta in frequenza $H(f) = \mathrm{sinc}(f/10)e^{i2\pi f}$ ha simmetria Hermitiana $H(-f)^* = H(f)$, e quindi corrisponde ad un filtro reale. Inoltre, alla frequenza $f_1 = 5\,\mathrm{Hz}$ si ha

$$H(5) = \mathrm{sinc}(\tfrac{1}{2})e^{i10\pi} = \mathrm{sinc}(\tfrac{1}{2}) = H(-5)$$

e pertanto l'uscita del filtro ad una sollecitazione alla frequenza $f_1 = 5\,\mathrm{Hz}$ risulta semplicemente

$$y(t) = H(5)x(t) = \mathrm{sinc}(\tfrac{1}{2})x(t)$$

ed il segnale non è distorto.

Domanda N. 7

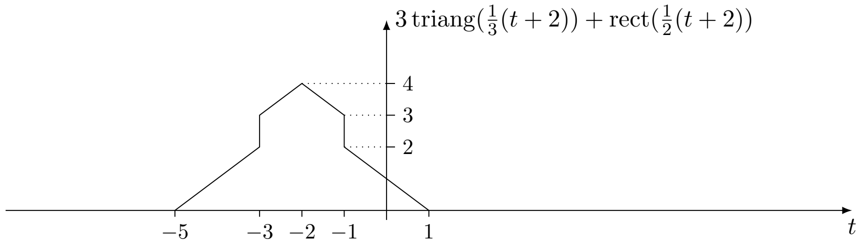
[3 punti] Disegnare la ripetizione periodica di periodo $T_p = 5$ del segnale

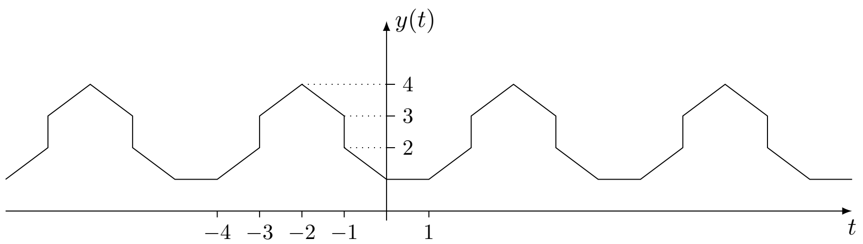
$$x(t) = 3\,\text{triang}(\tfrac{1}{3}t - 1) + \text{rect}(\tfrac{1}{2}t + 11)$$

Soluzione Notiamo che

$$\begin{aligned} y(t) = \text{rep}_5 x(t) &= \text{rep}_5 \left[3\,\text{triang}(\tfrac{1}{3}(t-3)) + \text{rect}(\tfrac{1}{2}(t+22))\right] \\ &= \text{rep}_5 \left[3\,\text{triang}(\tfrac{1}{3}(t+2)) + \text{rect}(\tfrac{1}{2}(t+2))\right] \end{aligned}$$

Il risultato della ripetizione periodica è illustrato in figura.





Domanda N. 8

[3 punti] Determinare energia e potenza del segnale

$$x(t) = 2\sin(2\pi \tfrac{2}{3} t) + 3ie^{i2\pi\frac{2}{3}t} \ .$$

Come cambiano energia e potenza per il segnale $y(t) = x(t) + 2\,\mathrm{rect}(\frac{1}{20}(t-10))$?

Soluzione Evidenziamo le armoniche (cioé le componenti esponenziali complesse a fase lineare) del segnale, ovvero scriviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= -ie^{i2\pi\frac{2}{3}t} + ie^{-i2\pi\frac{2}{3}t} + 3ie^{i2\pi\frac{2}{3}t} \\ &= 2ie^{i2\pi\frac{2}{3}t} + ie^{-i2\pi\frac{2}{3}t} \end{aligned}$$

per cui la potenza risulta

$$P_x = |2i|^2 + |i|^2 = 5$$

mentre l'energia è infinita. La presenza di un rect nel segnale non modifica il risultato in quanto il rect è un segnale limitato che dá contributo nullo alla potenza.

Domanda N. 9

[3 punti] Sia data una funzione MatLab `y = sistemaAR(y0,a,b,x)` che prende come ingresso i parametri scalari `y0`, `a`, `b`, ed il vettore `x` e restituisca in uscita un vettore `y` della stessa lunghezza di `x` secondo la legge `y[n] = a * y[n-1] + b x[n]` in cui il valore iniziale della memoria sia `y[0]=y0`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per determinare e poi disegnare la risposta impulsiva del sistema discreto autoregressivo in esame utilizzando i parametri `a=0.6` e `b=3`

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
a = 0.6;
b = 3;
x = [1, zeros(1,100)]; % l'ingresso è un impulso discreto
y = sistemaAR(0,a,b,x); % applico il sistema lineare

plot(y); % plot della risposta impulsiva
```

Domanda N. 15

[3 punti] Sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier e la coppia segnale-trasformata

$$s(t) = e^{-\pi t^2} \longrightarrow S(f) = e^{-\pi f^2} \ ,$$

si determini la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = 3e^{-2(t^2-9)}$$

Soluzione Nel dominio del tempo abbiamo

$$x(t) = 3e^{18}\, e^{-\pi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\right)^2} = 3e^{18}\, s\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\right)$$

e pertanto per la regola di scala si ha

$$X(f) = 3e^{18}\,\sqrt{\frac{\pi}{2}} S\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}f\right) = 3e^{18}\, e^{-\frac{1}{2}\pi^2 f^2}$$

Domanda N. 16

[3 punti] Il segnale
$$s(t) = \sin(2\pi t)\ \mathrm{sinc}(t) + \mathrm{sinc}^2(t)\, e^{i3\pi t}$$
può essere ricostruito a partire dai suoi campioni presi a frequenza (di campionamento) $F_c = \frac{1}{T} = 4\,\mathrm{Hz}$? In caso affermativo esplicitare la risposta in frequenza $H(f)$ del filtro di ricostruzione.

Soluzione La trasformata di Fourier del segnale $s(t)$ risulta
$$S(f) = \tfrac{1}{2i}\,\mathrm{rect}(f-1) - \tfrac{1}{2i}\,\mathrm{rect}(f+1) + \mathrm{triang}(f - \tfrac{3}{2})$$
la cui estensione in frequenza coincide con l'intervallo $\mathcal{I} = [-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, di durata 4. Pertanto, il campionamento non introduce aliasing e il segnale può essere ricostruito dai suoi campioni a patto di usare un filtro che selezioni le frequenze $\mathcal{I}$, ovvero
$$H(f) = \mathrm{rect}(\tfrac{1}{4}(f - \tfrac{1}{2}))$$

Domanda N. 17

[3 punti] Si considerino due segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y` aventi passo di campionamento comune `T`. Si supponga inoltre che i due vettori `x` e `y` abbiano la stessa lunghezza `N` e che l'asse comune dei tempi sia `t=T*(0:N-1)`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per:

- trovare le trasformate di Fourier $X(f)$ e $Y(f)$;
- valutare la convoluzione nel tempo $z(t) = x * y(t)$ tramite trasformazione inversa del prodotto delle trasformate $Z(f) = X(f)Y(f)$.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
N = length(x); % numero di campioni dei segnali
f = (0:N-1)/(N*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier del segnale x
Y = T*fft(y); % trasformata di Fourier del segnale y

Z = X.*Y;% trasformata di Fourier del segnale z
z = ifft(Z)/T;% segnale z per trasformata di Fourier inversa
```

Il fatto che i vettori `x` e `y` abbiano la stessa lunghezza, assicura che le loro trasformate di Fourier calcolate tramite `fft` siano valutate alle stesse frequenze `f`, e pertanto il prodotto `Z = X.*Y` ha senso. Nel caso in cui i vettori `x` e `y` non avessero la stessa lunghezza, invece, le trasformate di Fourier sarebbero valutate su frequenze diverse `fx` e `fy`. In questo caso si rende pertanto necessario riportare i vettori alla stessa lunghezza prima di calcolare la FFT, il che si fa semplicemente aggiungendo zeri al vettore più corto fino a raggiungere la lunghezza del vettore più lungo.

Esercizio N. 248

[7 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(t) + y''(t) - 12y'(t) = x'(t) - 3x(t)\ ,$$

1. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$ associata al sistema.
2. Spiegare perché tale sistema non è BIBO stabile.
3. Proporre un semplice sistema LTI con funzione di trasferimento $G(s)$ e polo in $s = -2$ che, messo in serie al sistema originale, lo renda stabile.
4. Determinare la risposta impulsiva del sistema complessivo $f(t) = h * g(t)$.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento è semplicemente

$$H(s) = \frac{s-3}{s^3 + s^2 - 12s} = \frac{s-3}{s(s-3)(s+4)} = \frac{1}{s(s+4)}$$

   con poli $p_1 = 0$ e $p_2 = -4$.

2. Il sistema è non BIBO stabile in quanto $p_1 = 0$ non verifica $\Re[p_1] < 0$.

3. Un possibile sistema che renda stabile $H(s)$ potrebbe essere

$$G(s) = \frac{s}{s+2} \quad \longrightarrow \quad F(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{(s+4)(s+2)}$$

   associato all'equazione differenziale

$$y'(t) + 2y(t) = x'(t)$$

4. Dalla scrittura

$$F(s) = \frac{R_1}{s+4} + \frac{R_2}{s+2}$$

   in cui i residui valgono

$$R_1 = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-4} = -\tfrac{1}{2}$$

$$R_2 = \left.\frac{1}{s+4}\right|_{s=-2} = \tfrac{1}{2}$$

   si ottiene

$$f(t) = -\tfrac{1}{2}e^{-4t}1(t) + \tfrac{1}{2}e^{-2t}1(t)$$

Esercizio N. 245

[7 punti] Sia dato il segnale

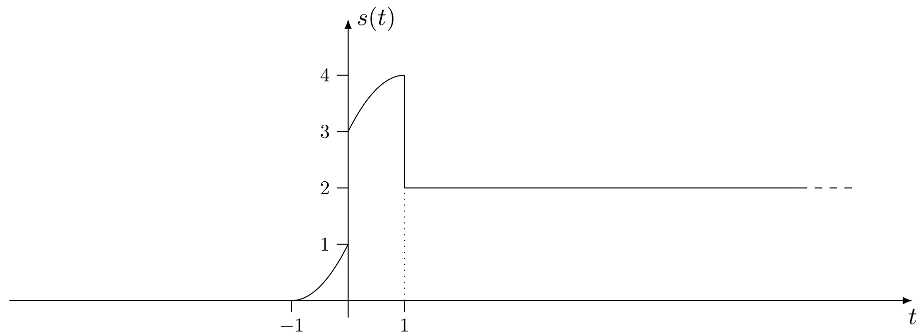
$$s(t) = (t+1)^2 \operatorname{rect}(t+\tfrac{1}{2}) + [2-(t-1)^2] \operatorname{rect}(t-\tfrac{1}{2}) + 2 \cdot 1(t)$$

Si chiede di:

1. rappresentare graficamente $s(t)$;
2. calcolare la derivata generalizzata $y(t) = s'(t)$;
3. calcolare la trasformata di Fourier $S(f)$.

Soluzione

1. Il segnale è rappresentato in figura



2. La derivata generalizzata risulta

$$y(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-1) + \begin{cases} 2(t+1) & -1 < t < 0 \\ 2(1-t) & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ovvero $y(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-1) + 2\operatorname{triang}(t)$.

3. Dalla relazione di integrazione

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} y(u)du \quad \longrightarrow \quad S(f) = \tfrac{1}{2}Y(0)\delta(f) + \frac{Y(f)}{i2\pi f}$$

ricordando che

$$Y(f) = 2\operatorname{sinc}^2(f) + 2(1-e^{-i2\pi f})$$

e osservando che $Y(0) = 2$, si ha

$$S(f) = \delta(f) + \frac{\operatorname{sinc}^2(f) + 1 - e^{-i2\pi f}}{i\pi f} = \delta(f) + \frac{\operatorname{sinc}^2(f)}{i\pi f} + 2\operatorname{sinc}(f)e^{-i\pi f}$$

Domanda N. 3

[3 punti] Il segnale

$$x(t) = 1 - 3i\sin(\tfrac{7}{3}\pi t - \tfrac{\pi}{3}) + 7e^{i\left(\frac{5}{4}\pi t + \frac{\pi}{7}\right)}$$

sia posto in ingresso ad un filtro *passa-basso* ideale con frequenza di cut-off (banda) $f_0 = 1\,\mathrm{Hz}$. Determinare l'uscita del sistema.

Soluzione Il filtro passa-basso ideale mantiene solo le frequenze minori (in valore assoluto) di $f_0 = 1$. Poché il segnale $x(t)$ è costituito da tre contributi, il primo a frequenza $f_1 = 0 < 1$, il secondo a frequenza $f_2 = \frac{7}{6} > 1$ ed il terzo a frequenza $f_3 = \frac{5}{8} < 1$, l'uscita del sistema è semplicemente

$$y(t) = 1 + 7e^{i\left(\frac{5}{4}\pi t + \frac{\pi}{7}\right)}$$

Domanda N. 14

[3 punti] Sia dato un segnale $s(t)$ con trasformata di Fourier

$$S(f) = \frac{1}{4}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}(f-f_0))e^{i\frac{9}{17}\pi} + \frac{1}{4}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}(f+f_0))e^{-i\frac{9}{17}\pi}$$

con $f_0 = \frac{3}{4}$. Dire quali passi di campionamento T assicurano che il segnale possa essere ricostruito a partire dai suoi campioni $s(nT)$.

Soluzione La trasformata di Fourier del segnale $s(t)$ è un segnale in banda base avente larghezza di banda

$$B = f_0 + 2 = \frac{11}{4}$$

ed estensione $[-B, B]$. Pertanto, per il teorema del campionamento esso può essere ricostruito da campioni prelevati alla frequenza di Nyquist $F_p = 2B = \frac{11}{2}$, ovvero con passo di campionamento $T \leq \frac{1}{F_p} = \frac{2}{11}$.

Domanda N. 13

[3 punti] Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, presi con passo di campionamento `T` e con tempi di campionamento `tx=T*(0:length(x)-1)`, siano rappresentati in MatLab dal vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(f)$ e le frequenze associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
fx = (0:Nx-1)/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier

semilogy(fx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```

Esercizio N. 249

[7 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = 2x'(t) - 2x(t) \ .$$

1. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$ associata al sistema.
2. Dire se tale sistema è BIBO stabile.
3. Determinare la risposta forzata all'ingresso $x(t) = e^t 1(t)$.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento è semplicemente

$$H(s) = \frac{2s-2}{s^2+8s+7} = \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+7)}$$

con poli $p_1 = -1$ e $p_2 = -7$.

2. Il sistema è BIBO stabile in quanto $\Re[p_i] < 0$.

3. Avendo l'ingresso condizioni iniziali nulle, la risposta forzata (nel dominio di Laplace) coincide con l'espressione

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+7)}\frac{1}{s-1} = \frac{2}{(s+1)(s+7)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+7}$$

in cui i residui valgono

$$R_1 = \left.\frac{2}{s+7}\right|_{s=-1} = \tfrac{1}{3}$$

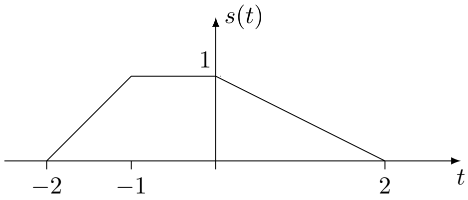
$$R_2 = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=-7} = -\tfrac{1}{3}$$

Da questo otteniamo

$$y_f(t) = \tfrac{1}{3}e^{-t}1(t) - \tfrac{1}{3}e^{-7t}1(t)$$

Esercizio N. 242

[7 punti] Si consideri il segnale continuo $s(t)$ disegnato in figura.



Si chiede di:

1. calcolare la trasformata di Fourier $S(f)$;
2. disegnare la parte dispari
$$s_o(t) = \tfrac{1}{2}s(t) - \tfrac{1}{2}s(-t)$$
e calcolarne la trasformata di Fourier $S_o(f)$.

Soluzione

1. Utilizzando la regola di derivazione si ottiene
$$x(t) = s'(t) = \mathrm{rect}(t + \tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-1))$$
la cui trasformata di Fourier risulta
$$X(f) = \mathrm{sinc}(f)e^{i3\pi f} - \mathrm{sinc}(2f)e^{-i2\pi f}$$
e dalla regola di integrazione si ha
$$S(f) = \frac{X(f)}{i2\pi f} + \tfrac{1}{2}X(0)\delta(f) = \frac{X(f)}{i2\pi f} = \frac{\mathrm{sinc}(f)e^{i3\pi f} - \mathrm{sinc}(2f)e^{-i2\pi}}{i2\pi f}$$
In alternativa (ma più difficile da intuire) si può notare che
$$s(t) = \mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}t) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(t+1)$$
per cui
$$S(f) = 2\,\mathrm{sinc}^2(2f) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f)e^{i2\pi f}$$

2. Per la parte dispari si ha
$$s_o(t) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{triang}(t+1) - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{triang}(t-1)$$
La sua trasformata di Fourier è
$$S_o(f) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sinc}^2(f)[e^{i2\pi f} - e^{-i2\pi f}] = \tfrac{i}{2}\,\mathrm{sinc}^2(f)\sin(2\pi f)$$

Esercizio N. 247

[7 punti] Il segnale discreto

$$x(n) = (-1)^n + \delta(n)$$

è dato in ingresso ad un filtro LTI discreto con risposta impulsiva

$$h(n) = (\tfrac{i}{2})^n 1_0(n)$$

1. Disegnare il segnale e calcolarne la potenza P_x.
2. Determinare l'uscita $y(n)$ del filtro.
3. Determinare la risposta in frequenza $H(f)$ del filtro.

Soluzione

1. Il segnale $|x(n)|^2$ vale 1 in tutti gli istanti temporali, escluso il punto $n = 0$ in cui il valore è 4. Pertanto la potenza vale semplicemente $P_x = 1$.

2. L'uscita si determina tramite convoluzione $y(n) = x * h(n)$ da sviluppare nel dominio del tempo in cui

$$x(n) = \delta(n) + (-1)^n \ .$$

Il risultato quindi è

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tfrac{i}{2})^k 1_0(k) \cdot (-1)^{n-k} \\ &= h(n) + (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{i}{2})^k \\ &= (\tfrac{i}{2})^n 1_0(n) + \frac{(-1)^n}{1 + \frac{i}{2}} \end{aligned}$$

3. Ricordando che $T = 1$ si ha

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tfrac{i}{2})^n 1_0(n) e^{-i2\pi f n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{i}{2} e^{-i2\pi f})^n = \frac{1}{1 - \frac{i}{2} e^{-i2\pi f}}$$

Domanda N. 25

[3 punti] Il segnale a tempo discreto

$$x(k) = e^{-2k}\, 1(k)$$

è posto in ingresso ad un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z-4}{(z-\frac{1}{2})(z-3)} \, .$$

1. Sia $y(k)$ l'uscita forzata del sistema LTI. Se ne calcoli la trasformata Zeta, $Y(z)$.
2. Si dica se $y(k)$ ha energia finita. Si osservi che, a tal fine, non è necessario calcolare con esattezza il segnale $y(k)$.

Soluzione

1. Considerando che la trasformata Zeta del segnale $x(k)$ risulta

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-2}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-2}}$$

   si ha

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z(z-4)}{(z-\frac{1}{2})(z-3)(z-e^{-2})}$$

2. La presenza del polo instabile $p_2 = 3$ assicura una componente 3^k nel segnale $y(k)$. Essendo tale componente non limitata, il segnale di uscita $y(k)$ **non** sarà limitato e quindi la sua energia è infinita.

Domanda N. 26

[3 punti] Si consideri un segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(f) = 0$ per $|f| \geq 1$, ed il segnale $y(t) = x(t)e^{-j2\pi f_1 t}$, con $f_1 = \frac{5}{2}$. Si dica per quali valori del passo di campionamento T_c è possibile ricostruire esattamente il segnale $y(t)$, a partire dai suoi campioni $y(nT_c)$, utilizzando la regola di ricostruzione

$$\tilde{y}(t) = \sum_n y(nT_c)\ \mathrm{sinc}((t - nT_c)/T_c)\ .$$

Si giustifichi opportunamente la risposta.

Soluzione La regola di ricostruzione corrisponde a quella del Teorema del Campionamento in banda base e garantisce perfetta ricostruzione sotto l'ipotesi che la banda B del segnale soddisfi la disuguaglianza $F_c = 1/T_c \geq 2B$. Si osservi che il prodotto per $e^{-j2\pi f_1 t}$ induce in frequenza un'equivalenza del tipo $Y(f) = X(f + f_1)$ e quindi, per la regola di traslazione, l'estensione del segnale $Y(f)$ nel dominio della frequenza corrisponde all'intervallo $e[Y] = (-1 - f_1, 1 - f_1) = (-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}) \subset (-\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$. Pertanto, la banda del segnale è $B = \frac{7}{2}$, il che corrisponde ad una scelta

$$T_c \leq \frac{1}{2B} = \frac{1}{7}$$

per il passo di campionamento.

Domanda N. 24

[3 punti] Si desidera filtrare numericamente un segnale reale a tempo continuo $x(t)$, ad estensione limitata, con un filtro avente risposta in frequenza $H(f)$ utilizzando MatLab. Si assuma che:

1. i campioni del segnale $x(t)$ siano disponibili nel vettore MatLab `x`, di lunghezza `N=100` e con passo di campionamento `T=0.1`;
2. i campioni in frequenza del filtro $H(f)$ siano disponibili nel vettore MatLab `H`, di lunghezza `N` e frequenze associate `f=(0:N-1)/(N*T)`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che applichi il filtraggio e ritorni il segnale filtrato nel tempo.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
Y = X*H; % filtraggio
y = 1/T*ifft(Y); % antitrasformata di Fourier
```

Esercizio N. 258

[7 punti] Siano dati i segnali

$$v_1(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad v_2(t) = \mathrm{rect}(t) \ .$$

1. Si calcoli e si disegni la convoluzione $v(t) = v_1 * v_2(t)$. A tal fine si possono usare, senza doverli dimostrare, i risultati notevoli visti a lezione.

2. Si calcolino quindi i coefficienti di Fourier del segnale

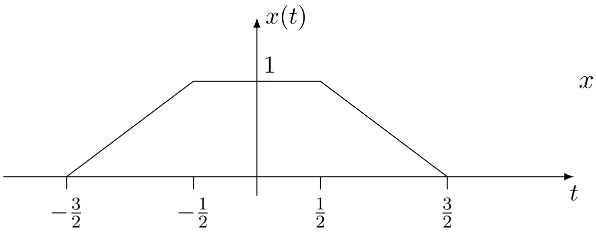
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t-4k) \ .$$

3. Infine, si calcoli e si disegni il segnale filtrato $y(t) = x * h(t)$, con $h(t)$ risposta impulsiva di un filtro passa basso avente corrispondente risposta in frequenza

$$H(f) = \begin{cases} 1 & , |f| < \frac{1}{10} \\ 40\left(\frac{1}{8} - |f|\right) & , \frac{1}{10} \le |f| \le \frac{1}{8} \\ 0 & , |f| > \frac{1}{8} \end{cases}$$

Soluzione

1. Come visto a lezione, la convoluzione tra due rettangoli corrisponde ad un trapezio



$$x(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - |t| & , |t| \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \\ 0 & , |t| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Per calcolare i coefficienti di Fourier del segnale $x(t)$ basta notare che questo si ottiene per ripetizione periodica con periodo $T_p = 4$ del segnale $v(t)$, e pertanto vale la relazione $X(kF) = V(kF)$, con $F = 1/T_p = \frac{1}{4}$ e $V(f)$ trasformata di Fourier di $v(t)$. Nel caso specifico si ha $V(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f)\,\mathrm{sinc}(f)$, da cui si ottiene

$$X(kF) = 2\,\mathrm{sinc}\left(\tfrac{k}{2}\right)\mathrm{sinc}\left(\tfrac{k}{4}\right) \ .$$

3. Per il filtraggio vale la relazione

$$Y(kF) = X(kF)H(kF) \ , \qquad H(kF) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

e pertanto

$$Y(kF) = \begin{cases} X(0) = 2 & , k = 0 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$y(t) = F \sum_k Y(kF) e^{-i2\pi kFt} = \tfrac{1}{4} \cdot 2 = \tfrac{1}{2} \ .$$

Esercizio N. 259

[7 punti] Si consideri l'equazione differenziale:

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x(t) + bx'(t)$$

1. Si determini la funzione di trasferimento $H_1(s)$ del sistema e se ne discuta la stabilità al variare del parametro b.
2. Assumendo $b = 1$, si calcoli l'ingresso $x(t)$ che produce la risposta forzata

$$y(t) = \sin(t)\, 1(t) \ .$$

3. Sempre assumendo $b = 1$, si scriva l'equazione differenziale che rappresenta la connessione in parallelo di $H_1(s)$ e

$$H_2(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \ .$$

Soluzione

1. La funzione di trasferimento del sistema è

$$H_1(s) = \frac{1+bs}{(s+2)(s-3)} \ .$$

La funzione di trasferimento presenta un polo a parte reale positiva e quindi non è BIBO stabile, ad eccezione del caso $b = -\frac{1}{3}$ in cui il polo a parte reale positiva si elide con lo zero ed il sistema risulta quindi BIBO stabile.

2. La trasformata di Laplace dell'uscita desiderata è

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \ ,$$

da cui ne consegue che

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{(s+2)(s-3)}{s+1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{-2}{s+1} + \frac{3s-4}{s^2+1} \ .$$

Infine, antitrasformando, si ottiene

$$x(t) = \Big(-2e^{-t} - 4\sin(t) + 3\cos(t) \Big)\, 1(t) \ .$$

3. Si ha

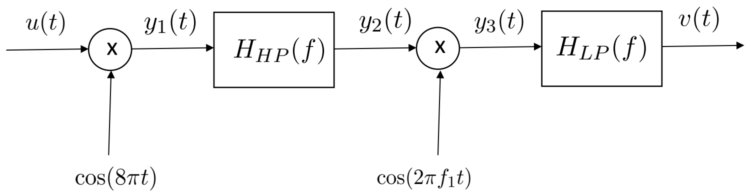
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{(s+1)(s+2) + (s-3)}{(s+2)^2(s-3)} = \frac{s^2+4s-1}{s^3+s^2-8s-12}$$

e pertanto l'equazione differenziale risulta

$$y'''(t) + y''(t) - 8y'(t) - 12y(t) = -x(t) + 4x'(t) + x''(t) \ .$$

Esercizio N. 260

[7 punti] Si consideri lo schema in figura



con ingresso $u(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ e dove il filtro passa-alto $H_{HP}(f)$ ed il filtro pass-basso $H_{LP}(f)$ hanno risposta in frequenza

$$H_{\mathrm{HP}}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{8}\right) \ , \quad H_{\mathrm{LP}}(f) = 4\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) \ .$$

1. Si calcoli e si disegni il segnale $Y_2(f)$.
2. Si trovi la frequenza f_1 che assicura l'equivalenza $v(t) = u(t)$, giustificando opportunamente la risposta.

Soluzione

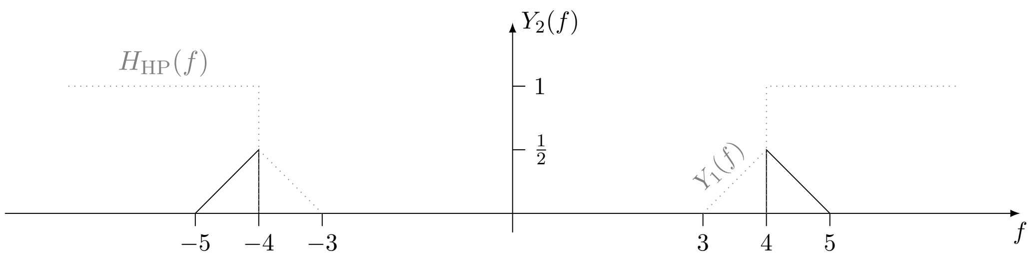
1. Il segnale $u(t)$ ha trasformata di Fourier

$$U(f) = \mathrm{triang}(f) \ .$$

Il segnale $y_1(t) = u(t)\cos(8\pi t)$ ottenuto modulando in ampiezza il segnale $\cos(8\pi t) = \cos(2\pi 4t)$ ha trasformata di Fourier

$$Y_1(f) = \tfrac{1}{2}U(f-4) + \tfrac{1}{2}U(f+4) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(f-4) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(f+4) \ ,$$

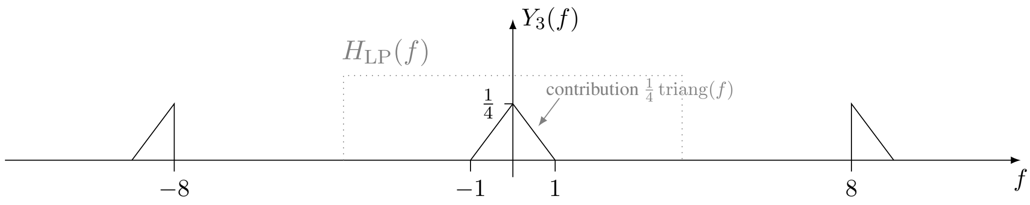
come si evince dalla regola di modulazione nel tempo. Considerando il fatto che il filtro $H_{\mathrm{HP}}(f)$ spegne le frequenze con valore assoluto $|f| < 4$ e mantiene tutte le altre con guadagno unitario, il segnale $Y_2(f)$ assume la forma illustrata in figura.



2. La frequenza corretta è $f_1 = 4$, il che corrisponde ad un'espressione

$$Y_3(f) = \tfrac{1}{2}Y_2(f-4) + \tfrac{1}{2}Y_2(f+4) \ ,$$

il cui risultato grafico viene riportato nella figura seguente.



Dalla figura risulta inoltre evidente che l'applicazione del filtro passa-basso $H_{\mathrm{LP}}(f)$ garantisce la rimozione dei contributi a frequenza maggiore di 4, e una amplificazione di un fattore 4 di quelli a frequenze minori di 4 (in valore assoluto), e pertanto garantisce

$$V(f) = \mathrm{triang}(f) \ ,$$

come richiesto.

Domanda N. 20

[3 punti] Dire se il sistema a tempo discreto descritto dallequazione

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)(\frac{1}{5})^k \,, & n \geq 0 \\ 0 \,, & \text{altrove} \end{cases}$$

è LTI. Motivare la risposta

Soluzione Osservando come l'epressione del segnale di uscita corrisponda per $n \geq 0$ ad una convoluzione con $h(n) = (\frac{1}{5})^n 1_0(n)$, possiamo scrivere l'uscita come

$$y(n) = (x * h(n)) \cdot 1_0(n)$$

ovvero come la cascata di due sistemi, il primo LTI (convoluzione con $h(n)$) ed il secondo lineare ma non tempo invariante (prodotto per $1_0(n)$). Pertanto il sistema complessivo risulta lineare ma non tempo invariante.

Domanda N. 19

[3 punti] Dire per quali valori reali di a ($a \neq 0$) il sistema discreto LTI causale descritto dalla funzione di trasferimento
$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{6}z^{-1})(a - z^{-1})}$$
è BIBO stabile e motivare la risposta.

Soluzione Il sistema discreto è BIBO stabile a patto che i poli soddisfino alla disuguaglianza $|p_i| < 1$. Nel caso in esame i due poli sono $p_1 = \frac{1}{6}$, che soddisfa la disuguaglianza, e $p_2 = \frac{1}{a}$ per il quale è richiesto che $|\frac{1}{a}| < 1$, ovvero che $|a| > 1$.

Domanda N. 11

[3 punti] Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per derivare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y) % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```

Esercizio N. 256

[7 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(t) - y'(t) = x'(t) + 2x(t)$$

1. Si determini la funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema
2. Si dica se il sistema è BIBO stabile
3. Si consideri il segnale di ingresso

$$x(t) = (Ke^{-3t} - 3e^{-2t})\,1(t)$$

dipendente dal parametro reale K. Si trovi il valore di K per cui l'ingresso $x(t)$ produce un'uscita forzata limitata, giustificando la scelta.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento di determina immediatamente per ispezione

$$H(s) = \frac{s+2}{s^3 - s} = \frac{s+2}{s(s-1)(s+1)}$$

2. I poli della funzione di trasferimento sono $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ e $p_3 = 1$. Poichè due sono a parte reale non-negativa allora il sistema NON è BIBO stabile

3. La trasformata di Laplace della risposta forzata si scrive nella forma

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s(s-1)(s+1)}X(s)$$

con

$$X(s) = \frac{K}{s+3} - \frac{3}{s+2} = \frac{s(K-3) + (2K-9)}{(s+2)(s+3)}$$

che garantisce

$$Y_f(s) = \frac{s(K-3) + (2K-9)}{s(s-1)(s+1)(s+3)}$$

Affinché luscita sia limitata è necessario che il numeratore $(K-3)s + (2K-9)$ cancelli il polo in $p_3 = 1$, l'unico che dà luogo ad una componente illimitata, ovvero

$$\frac{2K-9}{K-3} = -1 \quad \Longrightarrow \quad K = 4\,.$$

Tale scelta restituisce (ma questa parte non è esplicitamente richiesta dall'esercizio)

$$Y_f(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{6}}{s+3}$$

che nel dominio del tempo corrisponde a

$$y_f(t) = \tfrac{1}{3}\,1(t) - \tfrac{1}{2}\,e^{-t}1(t) + \tfrac{1}{6}\,e^{-3t}1(t)$$

Esercizio N. 243

[7 punti] Si consideri il segnale periodico

$$x(t) = \mathrm{rep}_1 \,\mathrm{sinc}(5t)$$

Si chiede di:

1. calcolare i coefficienti della serie di Fourier di $x(t)$;
2. il segnale $x(t)$ sia posto all'ingresso di un filtro con risposta in frequenza

$$H(f) = \mathrm{triang}(f - \tfrac{5}{2}) + \mathrm{triang}(f + \tfrac{5}{2})$$

determinare l'uscita $y(t)$.

Soluzione

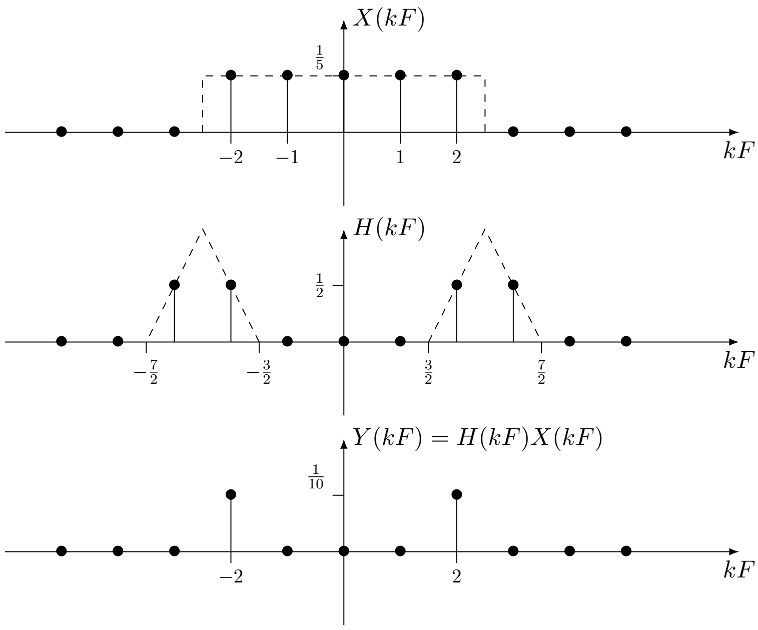
1. Osserviamo che la trasformata di Fourier del segnale $u(t) = \mathrm{sinc}(5t)$ è $U(f) = \frac{1}{5}\,\mathrm{rect}(\frac{1}{5}f)$. Pertanto, dalla proprietà che la ripetizione nel tempo con periodo $T_p = 1$ induce un campionamento in frequenza di passo $F = \frac{1}{T_p} = 1$, i coefficienti della serie di Fourier risultano

$$X(kF) = U(kF) = U(k) = \tfrac{1}{5}\,\mathrm{rect}(\tfrac{1}{5}k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & k = -2,-1,0,1,2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2. I coefficienti di Fourier dell'uscita $y(t)$ risultano

$$Y(kF) = X(kF)H(kF) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = \pm 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

come si può evincere dalla seguente figura, e pertanto $y(t) = \frac{1}{5}\cos(4\pi t)$.



Esercizio N. 244

[7 punti] Il segnale

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi t))\,\mathrm{sinc}^2(t)$$

viene campionato con frequenza di campionamento $F_c = \frac{1}{T} = 4\,\mathrm{Hz}$. Si chiede di:

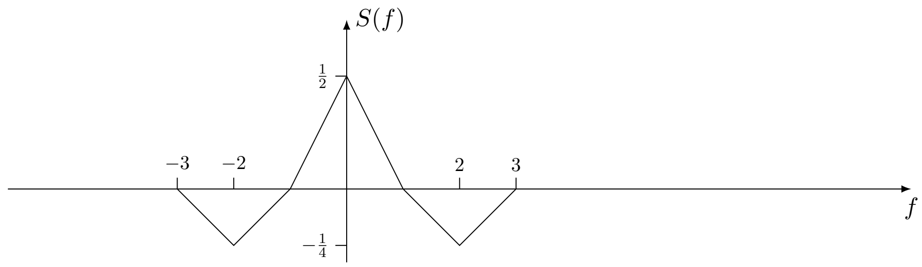
1. calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s(t)$;
2. calcolare e disegnare la trasformata di Fourier del segnale campionato $x(nT) = s(nT)$; é possibile ricostruire il segnale $s(t)$ a partire dai suoi campioni?
3. calcolare il segnale $y(t)$ ottenuto da $x(nT)$ tramite interpolazione con un filtro avente risposta impulsiva $h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}(t/(2T))$.

Soluzione

1. Il segnale $s(t)$ ha come trasformata di Fourier

$$S(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{triang}(f) - \frac{1}{4}\,\mathrm{triang}(f-2) - \frac{1}{4}\,\mathrm{triang}(f+2)$$

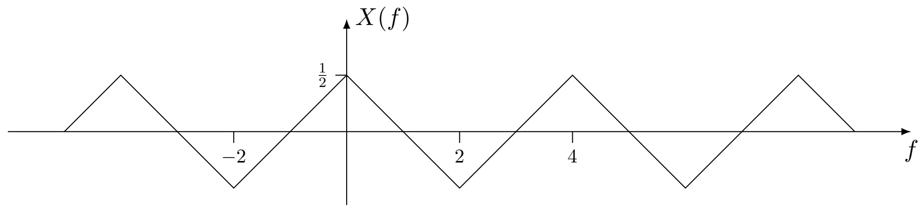
attivo in banda base nell'intervallo di frequenze $[-3, 3]$.



2. La trasformata di Fourier di $x(nT)$ risulta $X(f) = \mathrm{rep}_4 S(f)$ che coincide con l'onda triangolare

$$X(f) = \mathrm{rep}_4 \frac{1}{2}\,\mathrm{triang}(f) - \frac{1}{2}\,\mathrm{triang}(f-2)$$

illustrata in figura



Per la presenza di aliasing nella ripetizione periodica non è possibile ricostruire il segnale dai suoi campioni.

3. In questo caso il filtro in frequenza diventa

$$H(f) = 2\,\mathrm{rect}(2Tf) = 2\,\mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}f)$$

e pertanto

$$Y(f) = H(f)X(f) = \mathrm{triang}(f) \quad\Longrightarrow\quad y(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$$

Domanda N. 21

[3 punti] Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo $T_p = 2$, con coefficienti di Fourier

$$X(kF) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{|k|} + \delta(k) \ , \qquad \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli la potenza media del segnale $x(t)$.

Soluzione Applicando il Teorema di Parseval si ha

$$P_x = \frac{E_x(T_p)}{T_p} = F E_X = F^2 \sum_k |X(kF)|^2 \ , \qquad F = \frac{1}{T_p} = \tfrac{1}{2}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{4}\Big(4 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (\tfrac{1}{9})^k\Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{9})^k - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{17}{16} \end{aligned}$$

Domanda N. 22

[3 punti] Si considerino i due segnali

$$x(t) = \operatorname{sinc}(10t) + \operatorname{sinc}^2(5t) \ , \qquad y(n) = \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{3}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{6}\right)$$

uno a tempo continuo e l'altro a tempo discreto.

1. Si osservi che $y(n)$ può essere visto come la versione campionata di $x(t)$, ovvero $y(n) = x(nT)$. Si determini il tempo di campionamento T.
2. Si dica se è possibile ricostruire il segnale $x(t)$ a partire dai campioni $y(n)$, giustificando in modo opportuno la risposta.

Soluzione

1. L'intervallo di campionamento da usare è $T = \frac{1}{30}$.
2. Nel dominio della frequenza si ha

$$X(f) = \frac{1}{10}\operatorname{rect}(\tfrac{f}{10}) + \frac{1}{5}\operatorname{triang}(\tfrac{f}{5})$$

   la cui banda è $B = 5$. Poiché il passo della ripetizione periodica è $F_p = 1/T = 30 > 2B = 10$, il campionamento non introduce aliasing ed il segnale può essere ricostruito tramite un filtro interpolatore del tipo $h(t) = 1/T\operatorname{sinc}(t/T)$.

Domanda N. 23

[3 punti] Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(f)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(f)$ in corrispondenza delle frequenze `f=F*(-N/2:N/2-1)` in cui il passo di campionamento `F` sia dato.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
x = ifft(fftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
T = 1/(N*F); % passo di campionamento nel tempo
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```

Esercizio N. 257

[7 punti] Si consideri un sistema LTI a tempo discreto e causale con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1}}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}$$

Si chiede di:

1. scrivere l'equazione alle differenze associata al sistema;
2. dire se il sistema è BIBO stabile, giustificando la risposta;
3. trovare la risposta impulsiva.

Soluzione

1. L'equazione alle differenze associata al sistema è

$$6y(n) - 5y(n-1) + y(n-2) = 3x(n) + x(n-1) \ .$$

2. scrivendo la funziona di trasferimento come

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1}}{(z^{-1} - 3)(z^{-1} - 2)}$$

si nota come i suoi poli siano $z_1 = \frac{1}{3}$ e $z_2 = \frac{1}{2}$, entrambi con $|z_i| < 1$ il che rende il sistema BIBO stabile.

3. Identificando i fratti semplici di $H(z)$ abbiamo

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1}}{(z^{-1} - 3)(z^{-1} - 2)} = \frac{6}{z^{-1} - 3} + \frac{-5}{z^{-1} - 2} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

che, nel tempo, identificano la risposta impulsiva

$$h(n) = -2 \cdot (\tfrac{1}{3})^n \cdot 1_0(n) + \tfrac{5}{2} \cdot (\tfrac{1}{2})^n \cdot 1_0(n) \ .$$

Esercizio N. 252

[7 punti] Siano dati i segnali a tempo continuo

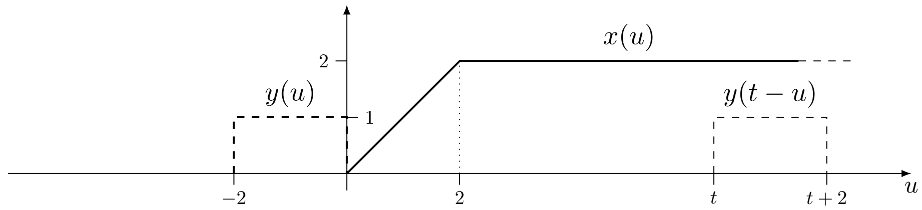
$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 2 \\ 2 & t > 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad , \qquad y(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t+1))$$

Si chiede di calcolare le seguenti convoluzioni:

1. la convoluzione $z(t)$ tra $x(t)$ e $y(t)$;
2. la convoluzione tra $x(t)$ e $y(t+8)$;
3. l'uscita $w(t)$ del sistema formato dal parallelo di due sistemi aventi risposta impulsiva $g_1(t) = y(t)$ e $g_2(t) = -y(t+8)$ con ingresso $x(t)$.

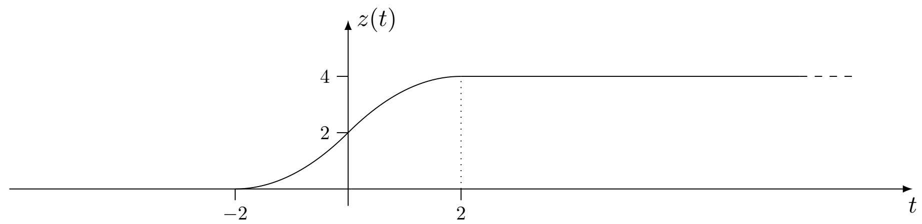
Soluzione

1. I segnali di interesse sono rappresentati in figura



Pertanto per la convoluzione identifichiamo quattro regioni e otteniamo

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t+2 \le 0 \\ \int_0^{t+2} u\,du & 0 < t+2 \le 2 \\ \int_t^2 u\,du + \int_2^{t+2} 2du & t \le 2 < t+2 \\ \int_t^{t+2} 2du & t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \le -2 \\ \frac{1}{2}(t+2)^2 & -2 < t \le 0 \\ \frac{1}{2}(4-t^2) + 2t & 0 < t \le 2 \\ 4 & t > 2 \end{cases}$$



2. Dalla regola di traslazione $x * (y * \delta_{-8}) = x * y * \delta_{-8} = z * \delta_{-8}$ otteniamo $z(t+8)$.
3. In questo caso si chiede la convoluzione tra $x(t)$ e la somma $y(t) - y(t+8)$, che restituisce semplicemente $w(t) = z(t) - z(t+8)$.

Esercizio N. 119

[7 punti] Il segnale

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(t) \cdot e^{-i10\pi t} + \mathrm{sinc}^2(2t) \cdot e^{-i2\pi t} + \mathrm{sinc}(t) \cdot e^{i6\pi t}$$

viene filtrato da un filtro con risposta in frequenza

$$H_1(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f+3}{8}\right)$$

L'uscita del filtro viene ulteriormente filtrata da un filtro con risposta in frequenza

$$H_2(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{8}\right)$$

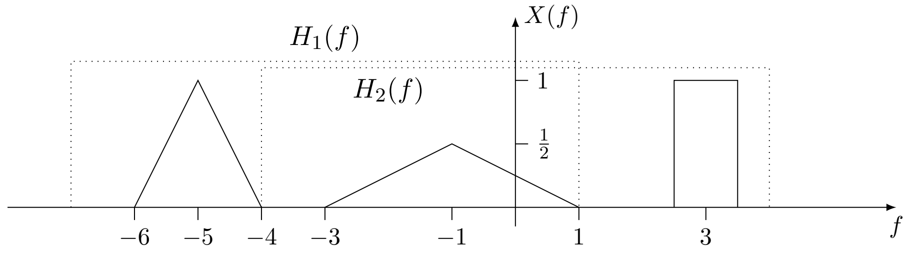
Infine, l'uscita di h_2 viene moltiplicata per $e^{i2\pi t}$ per ottenere il segnale $z(t)$. Si chiede di determinare e disegnare:

1. la trasformata $Y_1(f)$ all'uscita del filtro H_1;
2. la trasformata $Y_2(f)$ all'uscita del filtro H_2;
3. la trasformata $Z(f)$ ed il relativo segnale $z(t)$ all'uscita del sistema.

Soluzione Nel dominio della frequenza si ha

$$X(f) = \mathrm{triang}(f+5) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}(f+1)) + \mathrm{rect}(f-3)$$

che, come illustrato in figura



in cui le altezze di H_1 e H_2 sono state deliberatamente amplificate al fine di rendere leggibile la figura, assicura

$$Y_1(f) = \mathrm{triang}(f+5) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}(f+1))$$
$$Y_2(f) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}(f+1))$$

e pertanto

$$Z(f) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}f)\ , \quad z(t) = \mathrm{sinc}^2(2t)$$