SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi risolti 12 (Trasformata Zeta)

1. Calcolare la trasformata Zeta dei segnali $x(n) = \cos(\theta n)\mathbb{1}(n)$ e $y(n) = \sin(\theta n)\mathbb{1}(n)$ (essendo i due segnali nulli per $n < 0$, le loro trasformate bilatere e unilatere coincidono).

   Svolgimento. Ricordiamo che, per qualsiasi $a \in \mathbb{C}$,

   $$\mathcal{Z}\{a^n \mathbb{1}(n)\}(z) = \mathcal{Z}_u\{x(n)\}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

   con ROC $|z| > |a|$. Scrivendo $\cos(\theta n)\mathbb{1}(n) = \frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2}\mathbb{1}(n)$ e usando la linearità della trasformata, si ottiene

   $$\mathcal{Z}\{\cos(\theta n)\mathbb{1}(n)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{j\theta}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\theta}z^{-1}}\right] = \frac{1 - \cos(\theta)z^{-1}}{1 - 2\cos(\theta)z^{-1} + z^{-2}}$$

   per $|z| > |e^{\pm j\theta}| = 1$. Analogamente, usando $\sin(\theta n)\mathbb{1}(n) = \frac{e^{j\theta n} - e^{-j\theta n}}{2j}$, si ottiene, sulla stessa ROC,

   $$\mathcal{Z}\{\sin(\theta n)\mathbb{1}(n)\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1 - e^{j\theta}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\theta}z^{-1}}\right] = \frac{\sin(\theta)z^{-1}}{1 - 2\cos(\theta)z^{-1} + z^{-2}}.$$

2. Si calcoli la trasformata Zeta dei segnali $x(n) = na^n\mathbb{1}(n)$ e $y(n) = n^2a^n\mathbb{1}(n)$.

   Svolgimento. Ricordando che $\mathcal{Z}\{a^n\mathbb{1}(n)\}(z) = (1 - az^{-1})^{-1}$ su $|z| > |a|$, si ha

   $$\mathcal{Z}\{na^n\mathbb{1}(n)\}(z) = -z\frac{d\left((1 - az^{-1})^{-1}\right)}{dz} = \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

   Analogamente, da questa trasformata si ottiene

   $$\mathcal{Z}\{n^2a^n\mathbb{1}(n)\}(z) = -z\frac{d\left(\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}\right)}{dz} = \frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}, \quad |z| > |a|.$$

3. Si antitrasformino in un intorno del punto improprio le funzioni $X_1(z) = (z-a)^{-1}$, $X_2(z) = (z-a)^{-2}$ e $X_3(z) = (z-a)^{-3}$.

   Svolgimento. Partiamo ancora una volta dal fatto che $\mathcal{Z}\{x(n) = a^n \mathbb{1}(n)\}(z) = (1-az^{-1})^{-1} = \frac{z}{z-a}$ su $|z| > |a|$. Ne segue che

$$\mathcal{Z}\{x(n-1) = a^{n-1}\mathbb{1}(n-1)\}(z) = (z-a)^{-1}.$$

   Di qui $\mathcal{Z}\{nx(n-1) = na^{n-1}\mathbb{1}(n-1)\}(z) = -z\frac{d\big((z-a)^{-1}\big)}{dz} = z(z-a)^{-2}$. Segue ancora che

$$\mathcal{Z}\{(n-1)x(n-2) = (n-1)a^{n-2}\mathbb{1}(n-2)\}(z) = (z-a)^{-2}.$$

   Si ha poi $\mathcal{Z}\{n(n-1)x(n-2) = n(n-1)a^{n-2}\mathbb{1}(n-2)\}(z) = 2z(z-a)^{-3}$. Infine,

$$\mathcal{Z}\{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)x(n-3) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)a^{n-3}\mathbb{1}(n-3)\}(z) = (z-a)^{-3}.$$

4. Si antitrasformi in un intorno del punto improprio la funzione

$$X(z) = \frac{4z^2-7z+2}{(z-1)(z-2)^3}.$$

   Svolgimento. Troviamo la decomposizione in frazioni parziali

$$X(z) = \frac{4z^2-7z+2}{(z-1)(z-2)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-2)^3} + \frac{C}{(z-2)^2} + \frac{D}{z-2}.$$

   Si ottiene subito $A = 1$ e $B = 4$. Si trova poi C calcolando

$$X_1(z) := X(z) - \frac{4}{(z-2)^3} = \frac{4z-3}{(z-1)(z-2)^2}, \quad C = \lim_{z\to 2}(z-2)^2 X_1(z) = 5.$$

   Infine D si ottiene da

$$X_2(z) := X_1(z) - \frac{5}{(z-2)^2} = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}, \quad D = \lim_{z\to 2}(z-2)X_2(z) = -1.$$

   Vale quindi

$$X(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{4}{(z-2)^3} + \frac{5}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}.$$

   Usando quanto appreso nell'esercizio precedente, si ottiene

$$x(n) = \left(1-2^{n-1}\right)\mathbb{1}(n-1) + 5(n-1)2^{n-2}\mathbb{1}(n-2) + (n-1)(n-2)2^{n-2}\mathbb{1}(n-3).$$

5. Si consideri il problema al valore iniziale

$$y(n) + 5y(n-1) = 2x(n), \quad y(-1) = -3, \quad x(n) = 2\mathbb{1}(n).$$

Impiegando la trasformata Zeta unilatera, si determini:

a. La funzione di trasferimento del corrispondente sistema LTI causale associato;

b. se tale sistema è BIBO-stabile;

c. la risposta libera e quella forzata.

Svolgimento.

a.

$$H(z) = \frac{2}{1+5z^{-1}};$$

b. $H(z)$ ha l'unico polo in $z = -5$ che è fuori del cerchio unitario e quindi il sistema è instabile;

c. Applicando $\mathcal{Z}_u$ all'equazione, si ottiene

$$\left(1+5z^{-1}\right) Y_u(z) + 5y(-1) = \frac{4}{1-z^{-1}}.$$

Ne segue che

$$Y_u(z) = \frac{15}{1+5z^{-1}} + \frac{4}{(1-z^{-1})(1+5z^{-1})}$$

La risposta libera è l'antitrasformata del primo termine che vale, per $n \geq 0$, $y_l(n) = 15(-5)^n \mathbb{1}(n)$. Osservando che

$$\lim_{z^{-1}\to 1}(1-z^{-1})\frac{4}{(1-z^{-1})(1+5z^{-1})} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{z^{-1}\to -1/5}(1+5z^{-1})\frac{4}{(1-z^{-1})(1+5z^{-1})} = \frac{10}{3},$$

si ottiene che la trasformata della risposta forzata si può scrivere

$$\frac{4}{(1-z^{-1})(1+5z^{-1})} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{10}{3}\frac{1}{1+5z^{-1}}.$$

Antitrasformando, otteniamo $y_f(n) = \frac{2}{3}\mathbb{1}(n) + \frac{10}{3}(-5)^n\mathbb{1}(n)$.

6. Si consideri l'equazione di evoluzione di una popolazione considerata nel secondo laboratorio

$$y(n) = -0.6y(n-1) + x(n), \quad x(n) = 10[\mathbb{1}(n) - \mathbb{1}(n-3)],$$

che rappresenta la situazione in cui le risorse disponibili sono costanti per un certo intervallo di tempo e poi vengono a cessare. Si trovi la risposta forzata $y_f(n)$ (y(-1)=0).

Svolgimento. Il modo più semplice di risolvere è osservare che $x(n) = 10[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)]$. In vista della tempo invarianza del sistema che trasforma x in y_f, è sufficiente calcolare la risposta impulsiva $h(n)$. Infatti, $y_f(n) = 10[h(n)+h(n-1)+h(n-2)]$. Ma la risposta impulsiva è semplicemente l'antitrasformata dela funzione di trasferimento qui data da $H(z) = \left(1+0.6z^{-1}\right)^{-1}$. Otteniamo $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z)) = (-0.6)^n\mathbb{1}(n)$ da cui

$$y_f(n) = 10[(-0.6)^n\mathbb{1}(n) + (-0.6)^{n-1}\mathbb{1}(n-1) + (-0.6)^{n-2}\mathbb{1}(n-2)].$$

7. Si consideri il problema al valore iniziale:

$$2y(n)+5y(n-1)-3y(n-2) = x(n), \quad y(-1) = 0, y(-2) = 2, \quad x(n) = 3\delta(n).$$

Si determini

a. La funzione di trasferimento del corrispondente sistema LTI causale associato;

b. se tale sistema è BIBO-stabile;

c. la soluzione.

Svolgimento.

a. $H(z) = \left(2+5z^{-1}-3z^{-2}\right)^{-1} = \frac{1/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})}$;

b. i poli di H si trovano a $z_1 = \frac{1}{2}$ e $z_2 = -3$. Quindi il sistema non è BIBO stabile ;

c.

$$\left(2+5z^{-1}-3z^{-2}\right)Y_u(z) + 5y(-1) - 3[z^{-1}y(-1) + y(-2)] = 3$$

Si ottiene quindi

$$Y_u(z) = \frac{9}{2+5z^{-1}-3z^{-2}} = \frac{9/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})}.$$

Osservando che

$$\lim_{z^{-1}\to 2}(1-\frac{1}{2}z^{-1})\frac{9/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})} = \frac{9}{14},$$

$$\lim_{z^{-1}\to -\frac{1}{3}}(1+3z^{-1})\frac{9/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})} = \frac{27}{7}$$

si ha la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{9/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})} = \frac{9}{14}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{27}{7}\frac{1}{1+3z^{-1}}.$$

Concludiamo che, per $n \geq 0$,

$$y(n) = \frac{9}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{1}(n) + \frac{27}{7}(-3)^n \mathbb{1}(n).$$

Trasformata di Lapalace e sistemi discreti LTI - Esercizi

Le soluzioni verranno rese disponibili sul sito web del corso, con eccezione per gli esercizi dal 489 al 499 per i quali non è al momento disponibile alcuna soluzione. È possibile ottenere un punto in più all'esame consegnando al docente le soluzioni mancanti in formato LaTeX, a patto che siano corrette e ben svolte. I punti non sono cumulabili.

Trasformate Zeta

Esercizio 214 Trovare l'antitrasformata z (causale) della funzione razionale

$$S_z(z) = \frac{4z^2 - 7z + 2}{(z-3)^2(z-1)^2} \ .$$

Esercizio 215 Trovare l'antitrasformata z (causale) della funzione razionale

$$S_z(z) = \frac{4z^2 - 7z + 2}{(z-1)(z-2)^3} \ .$$

Esercizio 489 Trovare il segnale causale che ha come trasformata Z

$$S(z) = \frac{T}{z^{-1} - p_0} \ .$$

Esercizio 490 Trovare il segnale causale che ha come trasformata Z

$$S(z) = \frac{T}{(z^{-1} - p_0)^2} \ .$$

Esercizio 491 Dimostrare per induzione che il segnale

$$s(nT) = (-1)^K \binom{n+K-1}{K-1} p_0^{-(n+K)} \, 1_0(nT)$$

con $K \geq 1$, ha come trasformata Z

$$S(z) = \frac{T}{(z^{-1} - p_0)^K} \ .$$

Esercizio 492 Siano dati un segnale causale $x(nT) = \cos(2\pi f_0 nT) \, 1_0(nT)$ ed un filtro causale $g(nT)$ con trasformata Z

$$G(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{9 - z^{-2}} \ .$$

Si determinino la trasformata Z e l'andamento nel tempo dell'uscita, ovvero i segnali $Y(z)$ e $y(nT) = x * g(nT)$, assumendo $T = 1$.

Esercizio 493 Trovare il segnale causale che ha come trasformata z

$$S(z) = \frac{1 + z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Esercizio 494 Trovare il segnale causale che ha come trasformata Z

$$S(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Esercizio 495 Trovare il segnale che ha come trasformata Z

$$S(z) = z^2\,(1 - \tfrac{1}{2}z^{-1})\,(1 + z^{-1})\,(1 - z^{-1})$$

Esercizio 496 Trovare il segnale causale che ha come trasformata Z

$$S(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Soluzione di sistemi discreti LTI tramite trasformata Zeta

Esercizio 96 Si consideri il sistema LTI discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n-2) + 5y(n-1) + 6y(n) = 3x(n)\ .$$

a) Determinare le radici del polinomio caratteristico.
b) Determinare la risposta libera del sistema assumendo come condizioni iniziali $y(-1) = 2, y(-2) = 3$.
c) Determinare la risposta forzata assumendo come ingresso $x(n) = 1_0(n)$.

Esercizio 97 Si consideri il sistema LTI discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n-2) - 4y(n-1) + 4y(n) = x(n)\ .$$

a) Determinare le radici del polinomio caratteristico.
b) Determinare la risposta libera del sistema assumendo come condizioni iniziali $y(-1) = 2, y(-2) = 2$.
c) Determinare la risposta forzata assumendo come ingresso $x(n) = A\,1_0(n)$, con $A = 4$.

Esercizio 230 Sia dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$x(n) = y(n) - \frac{1}{2}\,y(n-1) - \frac{1}{2}\,y(n-2)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 2, y(-2) = 1$, ed ingresso $x(n) = 3\delta(n) - \delta(n-1)$. Si chiede:
1) Valutare l'evoluzione libera e la risposta forzata.
2) Dire se il sistema e' BIBO stabile.
3) Valutare la risposta impulsiva $g(n)$ e la sua trasformata di Fourier $G(f)$.

Esercizio 231 Sia dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$4\,y(n-2) - 4\,y(n-1) + y(n) = x(n)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 1, y(-2) = 1$, ed ingresso $x(n) = (1+n)\,1_0(n)$. Si chiede:
1) Valutare l'evoluzione libera e la risposta forzata.
2) Dire se il sistema e' BIBO stabile.
3) Valutare la risposta impulsiva $g(n)$ e la sua funzione di trasferimento $G(z)$.

Esercizio 497
Dato il sistema discreto descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{8(z-2)}{8z^2 + 6z + 1}\ .$$

Dopo aver espresso la risposta impulsiva $g(n)$, calcolare l'evoluzione forzata del sistema all'ingresso

$$x(n) = -2\,\left[(-2)^{-n} - \delta_{\mathbb{Z}}(n)\right]\,1_0(n)\ .$$

Il sistema è stabile?

Esercizio 498 Un sistema discreto è descritto dall'equazione

$$x(n) - x(n-8) = y(n-2) - 4y(n)$$

con $x(n) = 2\,1_0(n)$ e stato iniziale $y(-1) = y(-2) = 1$. Determinare evoluzione libera e forzata del sistema. Il sistema è stabile?

Esercizio 499

Un sistema discreto è descritto dall'equazione

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n)\ .$$

Si determini la risposta del sistema $y(n)$ quando $y(-1) = 0, y(-2) = 1$ e $x(n)$ è il gradino unitario.