**ES** (F6.2) Determinare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c.
$\ker f = \langle (0,3,-1), (1,0,1) \rangle$ e $\operatorname{im} f = \langle (1,1,1) \rangle$.
Tale $f$ è unica?

**METODO 1**

$$(1)\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (2)$$

Completiamo $(0,3,-1)$, $(1,0,1)$ ad una base di $\mathbb{R}^3$, prendendo ad esempio $(0,0,1)$.

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

quindi danno effettivamente una base di $\mathbb{R}^3$

$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \in \operatorname{im} f \Rightarrow$ possiamo scegliere $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (3)

(1) $f(3e_2 - e_3) = 0 \Rightarrow 3f(e_2) - f(e_3) = 0$

(2) $f(e_1) + f(e_3) = 0$

(3) $f(e_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$f(e_1) = -f(e_3) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \frac{1}{3} f(e_3) = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f} = \begin{pmatrix}-1 & 1/3 & 1\\ -1 & 1/3 & 1\\ -1 & 1/3 & 1\end{pmatrix}$$

Tale $f$ NON è unica (abbiamo effettuato diverse scelte arbitrarie)

**METODO 2**

Scegliamo la prima colonna uguale a $(1,1,1)$, poi imponiamo che $(0\ 3\ -1)$ e $(1,0,1)$ stiano nel nucleo.

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,1,1) \\ 3f(e_2) - f(e_3) = 0 \\ f(e_1) + f(e_3) = 0 \end{cases}$$

NOTA: otteniamo una $f$ diversa da quella ottenuta sopra.

**ES** Siano

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \right\}$$

(a) Verificare che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

$$v \in U \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a+2b \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$$

$$v \in W \Rightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ 2(a+b)+a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+2b=0 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\overline{2a \qquad = 0}$$

$U \cap W = \langle 0 \rangle$.

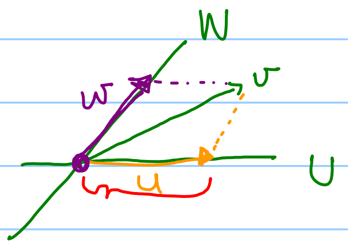
$\dim U = 2 \qquad \dim W = 1 \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$
$$= 2+1-0 = 3 \qquad \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$$

$U + W \leq \mathbb{R}^3$

quindi $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

(b) Calcolare la matrice rispetto alle basi canoniche della proiezione su $U$ parallelamente a $W$.




$v = u + w \qquad u \in U, \, w \in W$

$\pi(v) = u$

se $u \in U$, $\pi(u) = u$

se $w \in W$, $\pi(w) = 0$

$U \oplus W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ scelgo una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai generatori di $U$ e da quelli di $W$.

$$\mathcal{B} = \Big\{ \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_1''}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2''}}^{U}, \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}}_{v_3''}}^{W} \Big\}$$

$\pi(v_1) = v_1$

$\pi(v_2) = v_2$

$\pi(v_3) = 0$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi} = \begin{pmatrix} \pi(v_1) & & \cdots \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ coordinate nella base $\mathcal{B}$

$$\pi(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$

$$= \underline{P} \cdot \underline{A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi}} \cdot P^{-1}$$

$$P = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $P^{-1}$.

$$(S)_{iJ} = (-1)^{i+J} \det P_{iJ}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} S^t$$

$$S = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & \times \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2) - 2(-2-1)$$

$$= -2 + 6 = 4$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} S^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

LAPLACE :

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11} \; \cdots \; a_{1n}} \\ \vdots \\ a_{n1} \; \cdots \; a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{J=1}^{n} (-1)^{1+J} a_{1J} \det A_{1J}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

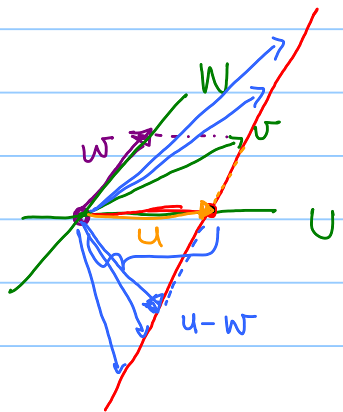
Resta da calcolare $P A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\pi} P^{-1} =$

$$= \frac{1}{4}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(c) Sapendo che $(1,1,1) \in U$, calcolare $\pi^{-1}((1,1,1))$.




Per ogni $\phi$ lineare, vale $\phi^{-1}(v) = \begin{cases} v_0 + \ker\phi & \phi(v_0) = v \\ \varnothing \end{cases}$

$\pi((1,1,1)) = (1,1,1) \in \pi^{-1}((1,1,1))$

$\pi^{-1}((1,1,1)) = (1,1,1) + \ker \pi$

$= (1,1,1) + W$

## DIAGONALIZZAZIONE

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile

Esistono D diagonale e H invertibile t.c. $D = H^{-1} A H$

Supponiamo $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ $\phi$ lineare

$H = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}$

$\mathcal{B}$ = colonne di $H$

$$D = H^{-1} A H$$

$$= A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}$$

$$= A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi}$$

la matrice di $\phi$ è in forma diagonale rispetto ad una base opportuna (base di autovettori)

A diag. su $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ (i) $P_A(t) = \det(A - tI)$ ha tutte radici reali

(ii) per ogni autovalore $\lambda$, $ma(\lambda) = mg(\lambda)$

[NOTA: va bene scrivere $P_A(\lambda)$.]

$ma(\lambda) = m$ dove $m$ è la massima potenza di $(t-\lambda)$ che divide $P_A(t)$.

$mg(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I))$.

ES Stabilire se le seguenti matrici siano diag.

$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P_C(t) = \det(C - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix}$

$$= (3-t)(3-t) - 1(-1)$$

$$= (3-t)^2 + 1$$

$$= t^2 - 6t + 10$$

$P_C(t) = 0$ ? $\quad \Delta = 6^2 - 4 \cdot 10$

$$= 36 - 40 = -4 < 0$$

$P_C(t)$ non ha soluzioni reali.

$\Rightarrow C$ non è diag.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)(\cancel{1} - 2t + t^2 - \cancel{1}) - (\cancel{1} - t - \cancel{1})$$

$$= (1-t)(t^2 - 2t) + t = t\left((1-t)(t-2) + 1\right)$$

$$= t\left(t - 2 - t^2 + 2t + 1\right) = t\left(-t^2 + 3t - 1\right)$$

$P_A(t) = 0 \iff t(-t^2 + 3t - 1) = 0$

$\iff t = 0 \qquad t^2 - 3t + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$

$t_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(i) ✓ Le radici sono tutte reali: $0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(ii) ✓ $\lambda = 0 \qquad ma(0) = 1$

$mg(0) = \dim(\ker(A - 0I))$

$0 < mg(0) \leq ma(0) = 1$

$\Rightarrow mg(0) = 1$

$\Rightarrow ma(0) = mg(0)$.

$\lambda$ autovalore, $0 < mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$. In particolare, ogni volta che $ma(\lambda) = 1$ abbiamo anche $mg(\lambda) = 1$.

$\lambda = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ allo stesso modo $ma = mg = 1$

$\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow A$ è diag.

Eg. 3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_E(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 5 \\ 0 & -t & 3 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} -t & 3 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= -t\,(1-t)^2$$

Autovalori: $\lambda = 0$ $\quad \lambda = 1$ $\quad$ tutti reali

$\lambda = 0$: $\quad ma(0) = 1 \Rightarrow mg(0) = 1 \Rightarrow mg(0) = ma(0)$

$\lambda = 1$: $\quad ma(1) = 2 \quad mg(1) = \dim(\ker(E - I))$

$$E - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(E - I) = 2$

formula dimensioni

$\dim(\ker(E-I)) = 3 - 2 = 1.$

A matrice $n \times n$

$rk(A) + \dim(\ker A) = n$

$mg(1) = 1$

$ma(1) \neq mg(1)$

$\Rightarrow$ E non è diag.

NOTA Se $ma(\lambda) > 1$, non possiamo dedurre nulla su $mg(\lambda)$.

Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diag. (infatti è già in forma diagonale), ma ha lo stesso pol. caratteristico della matrice sopra: $-t\,(1-t)^2$.

In questo caso però

$$ma(1) = mg(1) = 2.$$