EALG - Tutorato 7

Titolo nota 21/04/2021

CAMBIO DI BASE

$\phi : V \to W$ lineare

$\bar{v}, \bar{v}'$ basi di V

$\bar{w}, \bar{w}'$ basi di W

$$A_{\bar{v}, \bar{w}, \underline{\underline{\phi}}} = A_{\boxed{\bar{w}'}, \bar{w}, \underline{\underline{id}}} \cdot A_{\boxed{\bar{v}'}, \bar{w}', \underline{\underline{\phi}}} \cdot A_{\boxed{\bar{v}}, \bar{v}', \underline{\underline{id}}}$$

$$A_{\bar{v}, \bar{v}', id} = A^{-1}_{\bar{v}', \bar{v}, id}$$

DETERMINANTE

ES 1 Sia $W = \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4 \rangle$ dove

$\bar{w}_1 = (2, -1, 0, 0)^t$ $\bar{w}_2 = (0, 1, -1, 1)^t$ $\bar{w}_3 = (0, 2, 0, 1)^t$ $\bar{w}_4 = (2, 0, 1, 0)^t$

Sia $f : W \to W$ lineare t.c.

$f(\bar{w}_1) = f(\bar{w}_2) = \bar{w}_1 - \bar{w}_3$

$f(\bar{w}_3) = \bar{w}_2 - \bar{w}_4$

$f(\bar{w}_4) = k\bar{w}_2 - \bar{w}_4$

(a) Per quale valori di k, esiste una tale f?

Le condizioni sono compatibili?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{II + \frac{1}{2}I}{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} III + II \\ IV - II \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$IV + \frac{III}{2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & \overset{\times}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2a + 2d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \\ 2c + 2d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = -2c - d = 2d - d = d \\ c = -d \end{cases}$$

$(d = 1)$ $-\bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_3 + \bar{w}_4 = 0 \Rightarrow \bar{w}_4 = \bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{w}_3$

$$f(\bar{w}_4) = f(\bar{w}_1) - f(\bar{w}_2) + f(\bar{w}_3)$$

$$k\bar{w}_2 - \bar{w}_4 = (\bar{w}_1 - \cancel{\bar{w}_3}) - (\bar{w}_1 - \cancel{\bar{w}_3}) + \bar{w}_2 - \bar{w}_4$$

$$\boxed{k = 1}$$

L'applicazione esiste $\Leftrightarrow$ $k = 1$. Inoltre, dato che $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ è base di W, f è univocamente determinata.

(b) Scrivere la matrice di f rispetto ad una base "conveniente" di W.

$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ base di W

$f(w_1) = f(w_2) = w_1 - w_3$

sostituiamo la combinazione trovata sopra, dato che vogliamo esprimere $f(w_3)$ nella base $\{w_1, w_2, w_3\}$.

$f(w_3) = w_2 - \boxed{w_4} = w_2 - (w_1 - w_2 + w_3) = -w_1 + 2w_2 - w_3$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},f} = \begin{pmatrix} f(w_1) & f(w_2) & f(w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Trovare un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.c.

(1) $\phi(w) = f(w) \quad \forall w \in W$

(2) $\operatorname{im} \phi = \operatorname{im} f$

Scriverne la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Per la condizione (1) imponiamo:

$\phi(w_1) = f(w_1) = \underline{w_1 - w_3}$ $\qquad \phi = f$ per w_1, w_2, w_3

$\phi(w_2) = f(w_2) = \underline{w_1 - w_3}$ $\qquad \Rightarrow \phi = f$ su $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = W$

$\phi(w_3) = f(w_3) = \underline{-w_1 + 2w_2 - w_3}$

Per definire ϕ univocamente, dobbiamo definire l'immagine dei vettori di una base di $\mathbb{R}^4$. Siccome abbiamo già definito ϕ su w_1, w_2, w_3, completiamo i tre vettori ad una base di $\mathbb{R}^4$.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo un qualsiasi vettore $v \in \mathbb{R}^4$ t.c. $\{w_1, w_2, w_3, v\}$ sia base di $\mathbb{R}^4$: ad esempio $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (verificate che vada bene)

Per la condizione (2):

$\phi(v) \in \operatorname{im} \phi = \operatorname{im} f = \langle f(w_1), f(w_2), f(w_3) \rangle = \langle w_1 - w_3, -w_1 + 2w_2 - w_3 \rangle$

ad esempio scegliamo $\phi(v) = \underline{w_1 - w_3}$

Ci conviene scrivere la matrice di ϕ rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, v\}$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA:

Vogliamo ora scrivere $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$.

La scorsa settimana avremmo fatto così:

(★)• avremmo espresso $\phi(w_1)$, $\phi(w_2)$, $\phi(w_3)$, $\phi(v)$ nella base canonica (ad esempio $\phi(w_1) = w_1 - w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$)

- per trovare $\phi(e_1)$ nella base canonica avremmo trovato $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t.c.

$$e_1 = a w_1 + b w_2 + c w_3 + d v$$

da cui avremmo dedotto

$$\phi(e_1) = a\,\phi(w_1) + b\,\phi(w_2) + c\,\phi(w_3) + d\,\phi(v)$$

e quindi le coordinate di $\phi(e_1)$ nella base canonica, usando (★).

- e allo stesso modo avremmo trovato $\phi(e_2)$, $\phi(e_3)$, $\phi(e_4)$ nella base canonica.

Ora usiamo la strada più veloce del cambiamento di base.

Vogliamo $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = A_{\underset{\smile}{\mathcal{B},\mathcal{E}},id} \cdot A_{\underset{\smile}{\mathcal{B}},\mathcal{B},\phi} \cdot A_{\underset{\smile}{\mathcal{E},}\mathcal{B},id}$

matrice "facile"

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

"basta" trovare l'inversa

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id}^{-1}$$

$$\left(A \mid I_4 \right) \xrightarrow{\text{oper. elementari}} \left(I_4 \mid A^{-1} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$I/2 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{-1} & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$II + I \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III+II \\ IV+III \end{array}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III/2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{2} & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ II-2III \\ \\ IV-III \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{\begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A^{-1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \begin{matrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \begin{matrix} -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$

$$= A \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} \cdot A^{-1} \underset{\text{dopo qualche conto ...}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 2 \\ -1/2 & 2 & 2 & -3 \\ -1/2 & -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

F6.5

Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori di k, A_k è iniettiva? suriettiva?

A_k iniettiva $\Leftrightarrow \ker A_k = \langle 0 \rangle$

$\Leftrightarrow A_k$ è invertibile

$\Leftrightarrow \det A_k \neq 0$.

Laplace

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} = 0 \begin{vmatrix} k & k^2-1 \\ k-2 & k-1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} k-3 & k^2-1 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} k-3 & k \\ 2 & k-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k-3 & k \\ 2 & k-2 \end{vmatrix} = (k-3)(k-2) - 2k = k^2 - 7k + 6$$

$\det A_k = 0 \Leftrightarrow k^2 - 7k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = 1, 6$.

$k \neq 1, 6$, A_k è iniettiva.

$k = 1, 6$, A_k non è iniettiva.

suriettiva? $f_k \overset{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}{:}$ suriettiva $\Leftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{R}^3\ \exists x \in \mathbb{R}^3$ t.c. $f_k(x) = y$.

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im} f) = 3 \Leftrightarrow A_k$ ha rango massimo

$\Leftrightarrow \det(A_k) \neq 0$.

$f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva $\Leftrightarrow$ suriettiva.

iniettiva $\Leftrightarrow \dim(\ker f_k) = 0$

$\Leftrightarrow$ (formula dimensioni) $\dim(\operatorname{im} f_k) = 3$

$\Leftrightarrow \operatorname{im} f_k = \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ suriettiva.

(b) Per quali k, la controimmagine di $(1, -1, 1)$ è non vuota? infinita?

$k \neq 1, 6$ f_k è iniettiva, suriettiva

$k = 1, 6$ f_k non è né iniettiva, né suriettiva.

$f_k^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k \neq 1, 6$ $\operatorname{im} f_k = \mathbb{R}^3 \Rightarrow (1, -1, 1) \in \operatorname{im} f_k \Rightarrow f_k^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \emptyset$.

f_k è iniettiva $\Rightarrow$ esiste un solo vettore v t.c. $f_k(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ la controimmagine ha cardinalità uno.

$R = 1$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \operatorname{im} f_1$?

$$\operatorname{im} f_1 = \left\langle \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{\text{lin. dep.}}, \overset{w_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle \qquad \overset{w}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \overset{=}{=} \overset{w_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{+}{+} \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{im} f_1 .$$

$$\boxed{f_1^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \underline{\text{sol. particolare}} + \text{ker } f_1} = \left\{ \boxed{v + w} : w \in \ker f_1 \right\}$$

$\rightarrow$ f_1 non è iniettivo

$\underline{\ker f_1 \neq \langle 0 \rangle}$ e contiene infiniti vettori

$\Rightarrow$ la controimmagine è infinita.

$k = 6$ $\quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 35 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{im} A_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} A_6 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono indipendenti

i 3 vettori sono indip.

$\Leftrightarrow$ la matrice ha rango massimo

$\Leftrightarrow$ det(matrice) $\neq 0$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 3 & 35 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(5+1) - 2(35-1)$$

$$= 3 \cdot 6 - 2 \cdot 34 \neq 0$$

I tre vettori sono indipendenti $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im} f_6 \Rightarrow$ la sua controimmagine è vuota.