lezione n° 9 Algebra 04/05/2021 Paolo Rossi

Def: (Gruppo lineare)

Si dice gruppo lineare di ordine n l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili e si indica con $GL(n, \mathbb{R})$.

È un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione:

- esiste un elemento neutro $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$
- esiste l'inverso
- vale la prop. associativa $(AB)C = A(BC) \in GL(n, \mathbb{R})$

$A, B, C \in GL(n, \mathbb{R})$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Def: Due matrici $E, F \in M_n(\mathbb{R})$ si dicono SIMILI se $\exists\, H \in GL(n, \mathbb{R})$ t.c. $F = H^{-1}EH$. Ossia se le applicazioni lineari di matrici E e F rappresentano lo stesso endomorfismo $\varphi \in End(\mathbb{R}^n)$.

Oss: La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza $\sim$:

1) $E \sim F$ (E è simile ad F) se $F \sim E$ (simmetria)

2) $F \sim F$ (basta scegliere $H = I_n$) (riflessività)

3) se $E \sim F$, $F \sim G \rightarrow E \sim G$ (transitività)

Conseguenze

- se E e F sono simili hanno lo stesso determinante $\det E = \det F$
- se E e F sono simili hanno la stessa traccia $tr\, E = tr\, F$

ove $E \in M_n(\mathbb{R}) \to tr\, E = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$ somma degli elementi sulla diag. princ.

Def: Sia $f \in End(\mathbb{R}^n)$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$

$V_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = \lambda v \}$ è detto AUTOSPAZIO di f.

V_λ è uno spazio vettoriale. Se $\dim V_\lambda > 0$ allora λ è detto AUTOVALORE di f.

Se M è la matrice associata ad f allora $v \in V_\lambda$ se $Mv = \lambda v$.

Prop: Gli autospazi $\{V_\lambda\}_\lambda$ sono in SOMMA DIRETTA se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono AUTOVALORI distinti e $v_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, v_k \in V_{\lambda_k}$ allora $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Ossia non è possibile ottenere un vettore non nullo di un autospazio sommando vettori di altri autospazi.

Def: Un vettore $v \neq \underline{0}$ tc $f(v) = \lambda v$ è detto AUTOVETTORE di autovalore λ.

Def: Diremo Matrice Diagonale una matrice D con tutti gli elementi nulli tranne al più quelli sulla diagonale principale.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \sim D$ i.e. $A = H^{-1} D H$, $H \in GL(n, \mathbb{R})$ allora

$(H H^{-1}) = I_n$

$$A^t = \underbrace{(H^{-1} D H)\times \dots \times (H^{-1} D H)}_{t\text{-volte}} = H^{-1} D^t H$$ potenza di matrice

Per capire se una matrice è simile a una matrice diagonale si procede con la Diagonalizzazione.

Diagonalizzazione

v è un autovettore di $A \in M_n(\mathbb{R})$ se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tc $Av = \lambda v$, $v \neq \underline{0}$

$\rightarrow$ ~~Ammesso~~ $Av = \lambda I_n v \quad Av - \lambda I_n v = \underline{0}$

$$\boxed{(A - \lambda I_n)v = \underline{0}}$$

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}$

$(A - \lambda I_2)v = \underline{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$v \longmapsto (A - \lambda I_2)v$$

$\exists v \neq 0$ se $\operatorname{Ker}(f_\lambda) \neq \{\underline{0}\}$.

$\dim \operatorname{Ker} f_\lambda = 2 - \dim \operatorname{Im} f_\lambda = 2 - \operatorname{rank}(A - \lambda I_2) > 0$

$\rightarrow \operatorname{rank}(A - \lambda I_2) < 2$ ossia se $A - \lambda I_2 \notin GL(2, \mathbb{R})$ (ossia se non è invertibile) $\rightarrow$ quindi quando $\boxed{\det(A - \lambda I_2) = 0}$

Prop: Se $E \sim F$ allora $\det(E - \lambda I_n) = \det(F - \lambda I_n) = P(\lambda)$

Ossia tutte le matrici simili hanno lo stesso polinomio $P(\lambda)$ detto Polinomio Caratteristico.

Sia $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ e $P(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico. $P(\lambda)$ si fattorizza in $\mathbb{C}$.

$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{h_1}(\lambda - \lambda_2)^{h_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{h_i}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ numeri complessi distinti

TFA

detti autovalori di A e $K_1, \dots, K_i$ sono dette MOLTEPLICITÀ ALGEBRICHE $m_a(\lambda)$. ①

$$\sum_{j=1}^{i} \underbrace{K_j}_{m_a(\lambda_j)} = n$$

Si dice molteplicità GEOMETRICA $m_g(\lambda)$ di un autovalore λ la dimensione dell'autospazio V_λ.

Ossia $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$

Si ha inoltre : $\boxed{1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$

Prop : Una matrice A è DIAGONALIZZABILE se

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_i} = \mathbb{R}^n$$

ovvero se $\sum_{j=1}^{i} m_g(\lambda_j) = n$ ossia se $\boxed{m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j) \ \forall j = 1, \dots, i}$

Teorema : Una matrice A si diagonalizza in $\mathbb{R}$ se ogni autovalore è reale e ha molteplicità algebrica e geometrica coincidenti.

Corollario : Se le radici del polinomio caratteristico hanno tutte $m_a = 1$ allora la matrice si diagonalizza.

Esempio : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$-(\lambda-1)^1 \cdot \left[-(\lambda-2)^1\right] = (\lambda-1)^1(\lambda-2)^1$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$P(\lambda) = (\lambda-1)^1(\lambda-2)^1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_a(\lambda_1) = k_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 & m_a(\lambda_2) = k_2 = 1 \end{cases}$$

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) = 1 \rightarrow \underset{\dim V_{\lambda_1}}{\underset{=}{m_g(\lambda_1)}} = \underset{\dim V_{\lambda_2}}{\underset{=}{m_g(\lambda_2)}} = 1 = m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2)$$

$\exists D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ tc $A \sim D$

Calcolo degli autospazi V_{λ_1}, V_{λ_2}:

$$A - \lambda_1 I_2 = A - 1 I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid (A - I_2) = v = 0 \} = \mathrm{Ker}(A - I_2)$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{array}{l} y = 0 \\ x = u, \ u \in \mathbb{R} \end{array} \to (x, y)^T = (u, 0)^T, u \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{Ker}(A - I_2) = V_{\lambda_1} = \langle (1, 0)^T \rangle$ $\quad m_g(1) = \dim V_1 = 1$ ok!

$(1, 0)^T = V_1$ è un autovettore di autovalore $\lambda_1 = 1$.

$$A - \lambda_2 I_2 = A - 2 I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_2) = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid (A - 2I_2) v = 0 \}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \to \begin{array}{l} y = u, \ u \in \mathbb{R} \\ x = 2y = 2u \end{array}$$

$$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v = (2u, u)^T, u \in \mathbb{R} \} = \langle (2, 1)^T \rangle$$

$\dim V_2 = m_g(2) = 1$ ok!

$(2, 1)^T = V_2$ è un autovettore di autovalore $\lambda_2 = 2$.

La matrice H:

$$H = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$$ diagonalizza A e vale

$$\underline{\underline{D = H^{-1} A H}} \longrightarrow H H^{-1} A H H^{-1} = \underline{\underline{H D H^{-1} = A}}$$

$$H^{-1}: \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{H} \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right.\right] \xrightarrow{H_{1,2}(-2)} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{H^{-1}} \right.\right]$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

verifico che $A v_1 = \lambda_1 v_1 = 1 v_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

verifico che $A v_2 = \lambda_2 v_2 = 2 v_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio: Calcolare gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Stabilire se essa è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo scrivere la forma diagonale D e la matrice diagonalizzante H (matrice degli autovettori).
Calcolare inoltre A^{10}.

Sol: Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det(A - tI_3) = \det\begin{bmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & -1 \\ 0 & -1 & 2-t \end{bmatrix} \overset{\uparrow}{=} (2-t)\left[(1-t)(2-t)-1\right] +$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{Laplace}$$

$$(-1)\left[2-t\right] = (2-t)(\underbrace{2-t-2t+t^2-1}_{t^2-3t+1}) - (2-t) =$$

$$\overset{!}{=} (2-t)(t^2-3t+1-1) = (2-t)(t^2-3t)$$

$$\overset{!}{=} t(2-t)(t-3) = p(t)$$

La matrice A ha 3 autovalori distinti $p(t) = 0$ $\begin{cases} t=0 \\ 2-t=0 \\ t-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 2 \\ t_3 = 3 \end{cases}$

ed è pertanto diagonalizzabile (poiché $m_a = 1 \Rightarrow m_g = 1$).

Esiste cioè una matrice invertibile H tc

$$H^{-1}AH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

, determiniamo la matrice H: le sue colonne costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A (infatti gli autovettori sono tra loro lin. indip. poiché gli autospazi sono in somma diretta).

$$V_0 = \operatorname{Ker} A = \{(x,y,z)^T \mid A(x,y,z)^T = (0,0,0)^T\}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 0z = 0 & \longrightarrow y = -2x = 2z \\ 1x + 1y - 1z = 0 \\ 0x - 1y + 2z = 0 \end{cases} \quad x + y = 0 \rightarrow x = -z$$

$V_0 = \{(x,y,z)^T \mid (x,y,z)^T = (-z, 2z, z)^T, z \in \mathbb{R}\} \underset{z=-1}{=} \langle (1,-2,-1)^T \rangle$

ove $V_1 = (1,-2,-1)^T$

$$V_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} -x+y=0 \\ x-2y-z=0 \leftarrow \text{è la } 3^a - \text{la } 1^a \text{ (dip. lineare)} \\ -y-z=0 \qquad \text{ma sappiamo infatti che } \operatorname{rank}(A-3I_3) < 3 \text{ giacché } \dim V_3 = 1 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} y=0 & \to y=0 \\ x-y-z=0 & \to x=z \\ -y=0 & \to y=0 \end{cases}$$

$V_2 = \{(x,y,z)^T \mid (x,y,z)^T = (z,0,z)^T, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1)^T \rangle$

$$V_3 = \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-2y-z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+y=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \begin{cases} x=y \\ z=-y \end{cases} \to x=-z$$

$V_3 = \{(x,y,z)^T \mid (x,y,z)^T = (-z,-z,z)^T, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-1)^T \rangle$

$v_3 = (1,1,-1)^T$. Infine $H = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. $D = H^{-1}AH \longleftrightarrow A = HDH^{-1}$

$A^{10} = HD^{10}H^{-1}$, $D^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$ H è noto, H^{-1} si calcola con l'algoritmo di Gauss Jordan.