# Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 9/2/2024

---

**Esercizio 1** (10 punti) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ ed $f \in C^\infty(A)$ la funzione

$$f(x, y) = x + \beta y^2 - \log(x + y), \quad (x, y) \in A.$$

Al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di $f$ e discuterne la natura.

| Risposte. Punti critici: | Natura: |
|---|---|

**Esercizio 2** (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} + \log y \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza di una soluzione $y \in C^1(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

ii) Provare che la soluzione massimale $x \mapsto y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

iii) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione (la convessità non è richiesta).

iv) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}.$$

| Risposte: iii) Grafico: | iv) $L =$ |
|---|---|

**Esercizio 3** (10 punti) Consideriamo l'insieme di funzioni $X = \{f \in C([0, 1]) : |f(x)| \leq x \text{ per } x \in [0, 1]\}$. Al variare del parametro $\alpha \in [0, 2]$ discutere l'esistenza di una soluzione $f \in X$ dell'equazione

$$\arcsin\big(f(x)\big) = \alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{x^2}{3}, \quad x \in [0, 1].$$

| Risposte: |
|---|

2 ore e 30 minuti a disposizione

<u>Esercizio</u> Siano $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0 \}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + \beta y^2 - \log(x+y), \quad (x,y) \in A.$$

Al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di $f$ e discuterne la natura.

Risoluzione. Derivate prime

$$f_x = 1 - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2\beta y - \frac{1}{x+y}.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+y} = 0 \\ 2\beta y - \dfrac{1}{x+y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\beta y = 1$$

Se $\beta = 0$ non c'è soluzione e dunque non ci sono punti critici. Se $\beta \neq 0$ si trova $y = 1/2\beta$.

Sostituendo in $x+y=1$ si trova $x = 1 - \dfrac{1}{2\beta}$.

C'è un solo punto critico

$$\left( 1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta} \right), \quad \beta \neq 0.$$