SECONDA PROVA IN ITINERE

TEORIA DEI SISTEMI e CONTROLLO OTTIMO

Esercizio 1 [4pt]

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Si progetti, dimostrando che è possibile, un controllore in retroazione dal solo secondo ingresso $\mathbf{g}_2$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia polinomio caratteristico $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$.

b. Si progetti, dimostrando che è possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso $\mathbf{g}_1$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia polinomio caratteristico $(\lambda+1)^2(\lambda+2)$.

soluzione

a. $\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(\mathcal{R}_2) = 7$: $\quad (\mathbf{F}, \mathbf{g}_2)$ raggiungibile $\;\rightarrow\;$ $(\mathbf{F}, \mathbf{g}_2)$ controllabile

$\Rightarrow$ è possibile progettare il controllore richiesto

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{F} + \mathbf{g}_2\mathbf{k}_2^\top = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+k_1 & 1+k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & -2+k_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1-k_1 & \lambda-1-k_2 & -k_3 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda+2-k_3 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 + (1-k_2-k_3)\lambda^2 + (k_1-2k_2+k_3-1)\lambda + (2k_1-k_3+2)$$

$$\Delta_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} 1-k_2-k_3 = 6 \\ k_1-2k_2+k_3-1 = 11 \\ 2k_1-k_3+2 = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -5 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

b. $\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(\mathcal{R}_1) = 0$: $\quad (\mathbf{F}, \mathbf{g}_1)$ non raggiungibile

$(\mathbf{F}, \mathbf{g}_1)$ non raggiungibile ma in forma standard di raggiungibilità con $(\mathbf{F}_{11}, \bar{\mathbf{g}}_1)$ raggiungibile e $f_{22} = -2$ $\rightarrow \lambda = -2$ autovalore del sottosistema non raggiungibile

$\Rightarrow$ è possibile progettare il controllore richiesto

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \bar{\mathbf{F}}_{11} + \bar{\mathbf{g}}_1\bar{\mathbf{k}}_1^\top = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 - 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\bar{\mathbf{A}}_1}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \bar{k}_1 & -\bar{k}_2 + 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + (-1 - \bar{k}_1)\lambda + \bar{k}_1 - \bar{k}_2 + 1$$

$$\Delta_{\bar{\mathbf{A}}_1}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -1 - \bar{k}_1 = 2 \\ \bar{k}_1 - \bar{k}_2 + 1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{k}_1 = -3 \\ \bar{k}_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_1^\top & * \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -3 & -3 & * \end{bmatrix}^\top$$

Esercizio 2 [2pt]

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{h}^\top\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (1-\alpha)^2 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema risulta osservabile.
b. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema risulta ricostruibile.

soluzione

a. $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{h}^\top\mathbf{F} \\ \mathbf{h}^\top\mathbf{F}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2(1-\alpha)^2 \end{bmatrix}$, $\det(\mathcal{O}) = -\alpha^4$

$\Rightarrow$ il sistema è osservabile per $\alpha \neq 0$.

b.
- per $\alpha \neq 0$
  il sistema è osservabile $\to$ il sistema è ricostruibile
- per $\alpha = 0$
  $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}^3 = \mathbf{0}_{3\times3}$

  $\ker(\mathcal{O}) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \subset \ker(\mathbf{F}^3) = \mathbb{R}^3 \ \to$ il sistema è ricostruibile

$\Rightarrow$ il sistema è ricostruibile $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [4pt]

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{h}^\top\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si progetti, se possibile, un regolatore dead-beat, ovvero

a. un controllore dead-beat

b. uno stimatore dead-beat

soluzione

a. $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(\mathcal{R}) = -2$: il sistema è raggiungibile e quindi controllabile

$\Rightarrow$ è possibile progettare il controllore dead-beat richiesto

$$\mathbf{A} = \mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{k}^\top = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+k_1 & +k_2 & +k_3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1-k_1 & -k_2 & -k_3 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 + (2-k_1)\lambda^2 + (1-k_1+k_2-k_3)\lambda - k_3$$

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} 2-k_1 = 0 \\ 1-k_1+k_2-k_3 = 0 \\ -k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

b. $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(\mathcal{O}) = 0$: il sistema non è osservabile

il sistema è in forma standard di osservabilità con $(\mathbf{F}_{11}, \mathbf{h}_1)$ osservabile e $f_{22} = 0$
$\rightarrow \lambda = 0$ autovalore del sottosistema non osservabile

$\Rightarrow$ è possibile progettare lo stimatore dead-beat richiesto

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}}_{11} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_1\bar{\mathbf{h}}_1^\top = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\ell}_1 \\ \bar{\ell}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_1 \\ -1+\bar{\ell}_2 & -1+\bar{\ell}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\bar{\mathbf{B}}}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1-\bar{\ell}_1 & -\bar{\ell}_1 \\ 1-\bar{\ell}_2 & \lambda+1-\bar{\ell}_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + (2-\bar{\ell}_1-\bar{\ell}_2)\lambda + (1-\bar{\ell}_2).$$

$$\Delta_{\bar{\mathbf{B}}}(\lambda) = \lambda^2$$

$$\begin{cases} 2-\bar{\ell}_1-\bar{\ell}_2 = 0 \\ 1-\bar{\ell}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\ell}_1 = 1 \\ \bar{\ell}_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\ell} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\ell}}_1 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & * \end{bmatrix}^\top$$